



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Programa de la asignatura
TEORÍA DE LA MEDIDA

Tipo de asignatura: Obligatoria
Código: 8902
Unidades de crédito: 6U
Requisitos: 8402 Análisis II
Requisito sugerido: 8901 Topología, 8701 Probabilidades
Horas semana: 6 (4 horas teóricas y 2 horas prácticas)
Vigencia: 1993-1

OBJETIVO DE LA ASIGNATURA

Objetivo General

Entender los resultados más importantes de la teoría de la medida e integración de Lebesgue y estará capacitado para aplicar esta importante herramienta del análisis a otras ramas de la matemática.

Objetivos Específicos:

1. Comprender nociones básicas de familias de conjuntos, clases de conjuntos y funciones definidas sobre clases de conjuntos.
2. Definir una medida y estudiar sus propiedades.
3. Comprender las diferentes etapas en la construcción de la medida de Lebesgue y el papel de la σ -aditividad en este esquema.
4. Identificar las diferentes etapas en el proceso de extensión con el que se construye la Integral de Lebesgue a partir de la medida de Lebesgue.
5. Comprender la importancia de la integral de Lebesgue y sus propiedades, para aplicar los teoremas centrales de convergencia en el marco de la teoría de integración de Lebesgue.

6. Aplicar los conceptos adquiridos previamente para iniciar el de la teoría de integración, en el marco de espacios de funciones más generales.

CONTENIDO PROGRAMÁTICO TEÓRICO

TEMA 1 Generalidades y conceptos previos.

(12 horas)

Límite superior e inferior de sucesiones de números. Funciones y familias de conjuntos. Función indicatriz o indicador de un conjunto. Propiedades. Clases de subconjuntos de un conjunto dado: semi-anillo, semi-algebra, σ -algebra, σ -anillo, clase monótona. La σ -algebra de Borel en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^n$, diversas familias de generadores. Funciones definidas en clases de subconjuntos. Definición de medida. Propiedades. Ejemplos sencillos: medida de contar en $\mathbf{N}$, medidas de probabilidad en conjuntos discretos (Stieltjes), etc. Teorema de la clase monótona. El conjunto y la función de Cantor.

TEMA 2 La medida de Lebesgue en $\mathbf{R}$

(12 horas)

Construcción de la medida de Lebesgue a partir de la función longitud de un intervalo. Medida exterior de Lebesgue. Las σ -algebras de Borel y Lebesgue. Unicidad de la medida de Lebesgue (usando teorema de la clase monótona). Propiedades de la medida de Lebesgue: regularidad, diversos tipos de aproximaciones, invariancia por traslaciones. Medida de Lebesgue del conjunto de Cantor. Ejemplo de conjunto no medible. Las medidas de Stieltjes en $\mathbf{R}$, propiedades. Medidas asociadas a funciones continuas y discontinuas.

TEMA 3 Funciones medibles

(12 horas)

Funciones medibles de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Diversas caracterizaciones. Propiedades, ejemplos, Funciones simples. Funciones en escalera. Aproximaciones de funciones medibles por funciones simples y por funciones en escalera. Funciones continuas.

TEMA 4 La Integral de Lebesgue en $\mathbf{R}$

(12 horas)

Repaso de la integral de Riemann. Caracterización de funciones integrables de Riemann. Integral de Lebesgue de funciones simples, medibles positivas y medibles. Teoremas de intercambio de límites con integrales: teorema de la convergencia monótona. Lema de Fatou. Teorema de la convergencia dominada. Ejemplos y aplicaciones. Teoremas de aproximación de funciones integrables por simples, en escalera y continuas. Intercambio de derivadas con integrales. Comparación entre las integrales de Riemann y Lebesgue. Integrales impropias de Riemann e integral de Lebesgue. Integración con respecto a medidas de Stieltjes. Ejemplos.

TEMA 5 Diferenciación e Integración

(8 horas)

Diferenciación de funciones monótonas. Funciones de variación acotada. Diferenciación de la integral indefinida. Continuidad absoluta. Formulas de cambio de variable e integración por partes.

TEMA 6 Medida e integración de Lebesgue en R^n

(10 horas)

R^n como espacio producto, σ -álgebra de Borel en R^n .

Funciones medibles $f : R^n \rightarrow R$. Secciones de conjuntos y funciones medibles. Medida de Lebesgue en R^n . Construcción a partir de la noción de volumen. Teoremas de Fubini y Tonelli.

TEMA 7 Diversos Tipos de Convergencia y Espacios L^p .

(10 horas)

Convergencia puntual en casi todas partes, uniforme y casi uniforme. Convergencia en medida. Los espacios $L^p(R^n)$ y l^p (L^p en N con medida de contar). Desigualdades de Holder y Minkowski. Convergencia en norma p . Relación entre los diversos tipos de convergencia.

TEMA 8 Introducción a la integración en espacios generales

(8 horas)

Funciones reales medibles en un espacio $(X, \mathcal{F})$. Integral con respecto a una medida μ en $(X, \mathcal{F})$. Teoremas de convergencia: convergencia monótona. Lema de Fatou. Convergencia dominada. Medidas signadas. Teoremas de descomposición de Hahn-Jordan. Teorema de Radon-Nikodym.

ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA

1. Centradas en el Docente: desarrollando conferencias y clases unidireccionales, orientadas a incentivar la resolución de problemas.
2. Centradas en el alumno: El alumno será el responsable de su propio aprendizaje, seleccionará tanto los medios como el tiempo requerido para el estudio, realizará trabajo de investigación, lecturas dirigidas, talleres y la resolución de problemas.

ESTRATEGIAS DE EVALUACION

Se recomienda al profesor evaluar por separado cada una de las unidades del curso, tomando en cuenta los siguientes criterios e instrumentos: Evaluación escrita de cada dos o tres temas (en los cuales se tomará en cuenta el procedimiento que el alumno ha seguido para obtener sus resultados), participación en talleres de ejercicios y en las discusiones de clase, enfatizando el desarrollo de habilidades para realizar demostraciones de carácter deductivo y constructivo.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

1. Betz, C. Introducción a la teoría de la medida e integración.
2. Royden, H. L. Real Analysis.
3. Rudin, W. Real and Complex Analysis.
4. Weir, A. Lebesgue Integration and Measure.