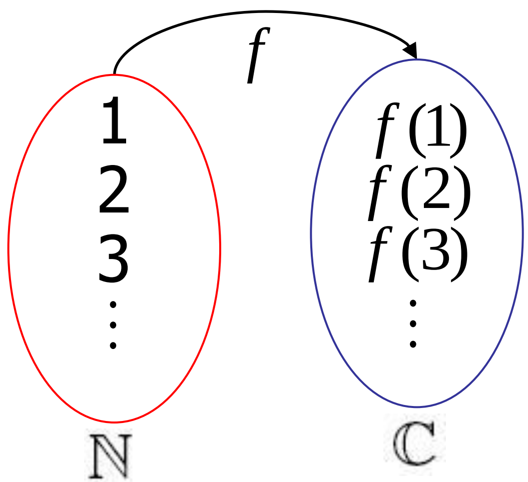
Análisis Numérico

Tema # 2: Ceros de funciones

Preliminares

Sucesión:



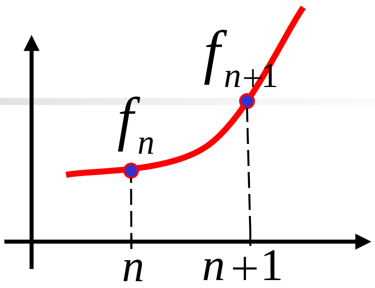
Es una función cuyo dominio son todos los natureles, se denomina sucesión (secuencia) infinita. El término f(n) se denomina término n-ésimo

- $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n)$
- $\{f(n)\}$
- Simple: $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$
- $\{f_n\}$

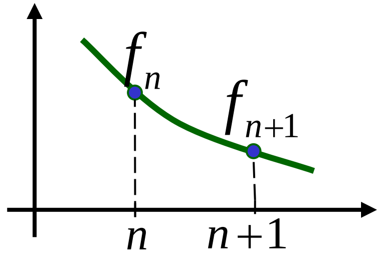
Si $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ se *aproxima* a L cuando n aumenta, se dice que la sucesión converge a L

$$\lim_{n \to \infty} f_n = L$$

Preliminares



- Sucesión creciente: $f_n \le f_{n+1} \quad \forall n \ge 1$



- Sucesión decreciente: $f_n \ge f_{n+1} \quad \forall n \ge 1$
- Monotona: Si es creciente o decreciente
- Acotada: $\forall n \ge 1 : \exists \mu > 0 : |f_n| \le \mu$ (tiene techo o piso)

Una sucesión monótona converge si y solo si es acotada

Elaborado por Prof. Marlliny Monsalve

Preliminares

Órdenes de convergencia

Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$

- Al menos lineal: Si existe una constante $k \le 1$ y un entero N tal que

$$|x_{n+1} - x_*| \le k|x_n - x_*| \quad \forall n \ge N$$

- Superlineal: Si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ convergente a cero y un entero N tal que

$$|x_{n+1} - x_*| \le \varepsilon_n |x_n - x_*| \quad \forall n \ge N$$

- Al menos cuadrática: Si existe una constante k y un entero N tal que

$$|x_{n+1} - x_*| \le k|x_n - x_*|^2 \quad \forall n \ge N$$

- Al menos orden α: Si existen dos constantes α y k y un entero N tal que

$$|x_{n+1} - x_*| \le k|x_n - x_*|^\alpha \quad \forall n \ge N$$

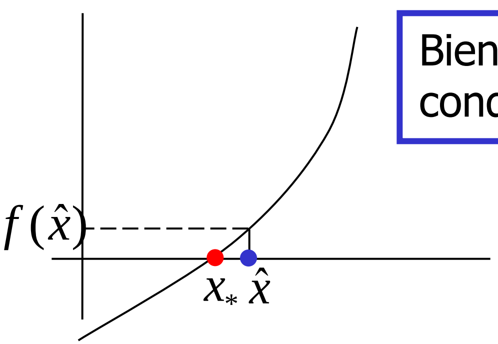
Problema: Cero de funciones

Dada $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ no lineal hallar x_* tal que $f(x_*)=0$

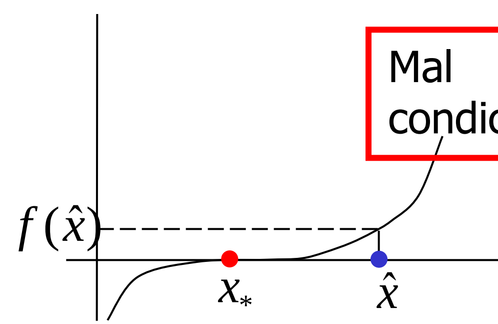
Condicionamiento

Dado $\hat{x}$

- Si $\underbrace{|\hat{x}-x_*|}_{\text{Error absoluto}} \approx 0$ entonces $\hat{x}\approx x_*$?
- Si $\underbrace{|f(\hat{x})|}_{\text{Residual}} \approx 0$ entonces $\hat{x}\approx x_*$?



Bien condicionado



Mal condicionado

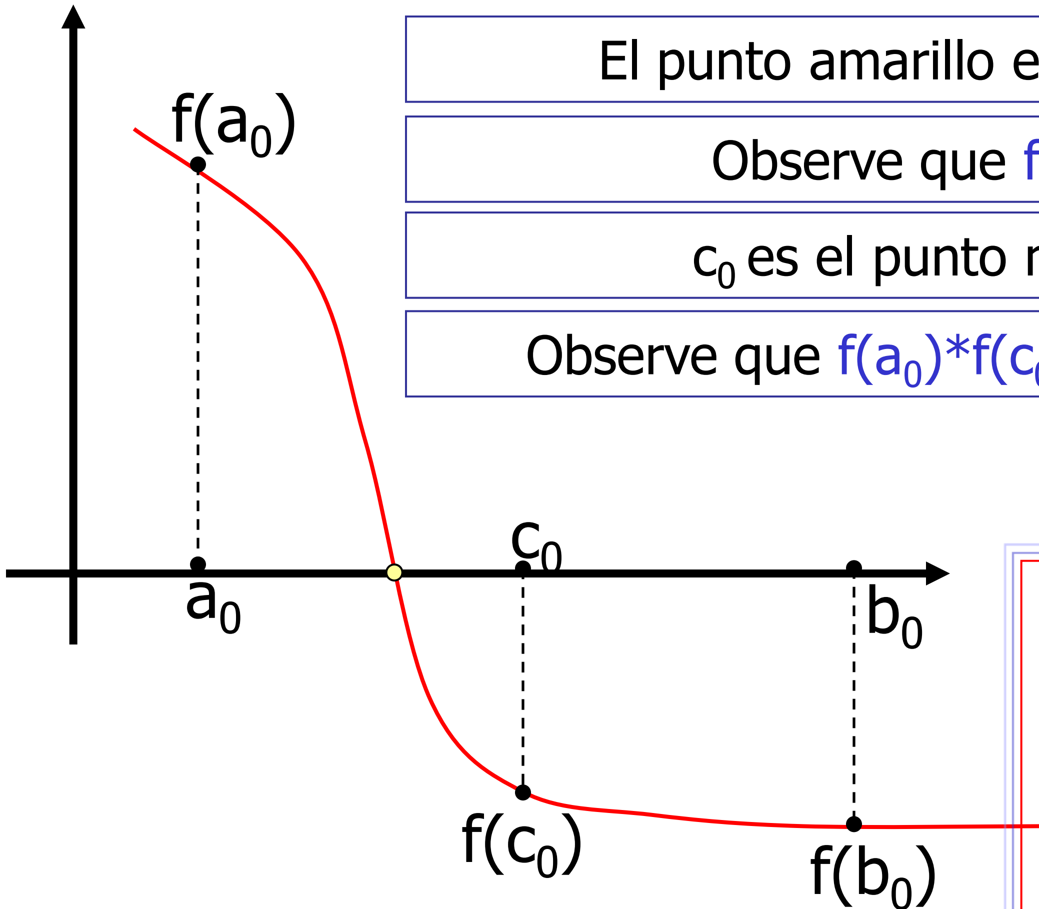
- $|f(\hat{x})|\approx 0$ y $|\hat{x}-x_*|\approx 0$
- $|f(\hat{x})|\approx 0$ pero $|\hat{x}-x_*|\not\approx 0$

Problema: Cero de funciones

Dada $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ no lineal hallar x_* tal que $f(x_*)=0$

- Método de bisección
- Método de Newton y de secante
- Iteraciones de punto fijo
- Caso multivariable:
  - Método de Newton
  - Método de Broyden

Bisección



El punto amarillo es un cero de la función

Observe que $f(a_0)*f(b_0) < 0$

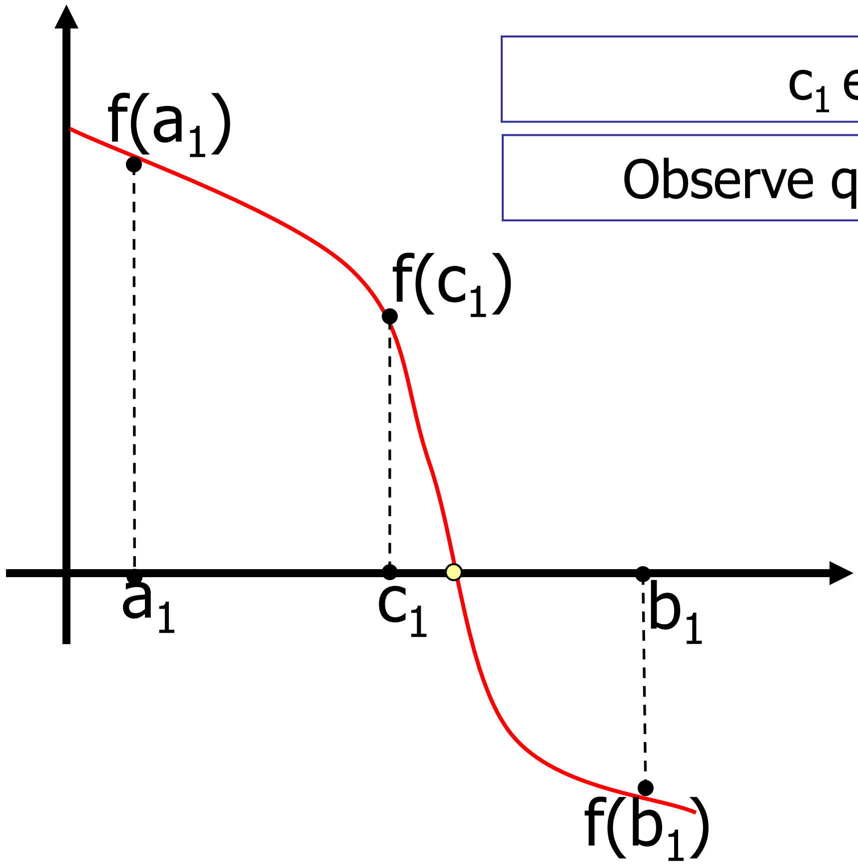
c_0 es el punto medio entre a_0 y b_0

Observe que $f(a_0)*f(c_0) < 0$ y de $f(b_0)*f(c_0) > 0$

- La raíz está a la derecha de c_0
- El punto c_0 está más cercano a la raíz!!

Bisección

Zoom del intervalo $[a_0\ c_0]:=[a_1\ b_1]$



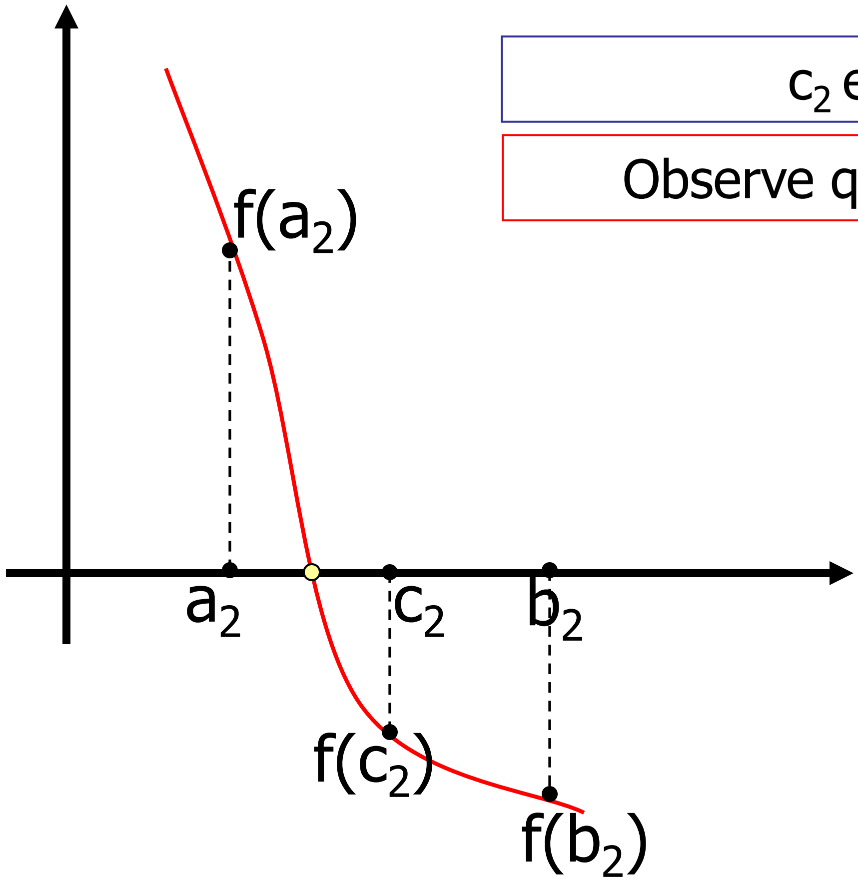
c_1 es el punto medio entre a_1 y b_1

Observe que $f(a_1)*f(c_1) > 0$ y de $f(b_1)*f(c_1) <0$

- La raíz está a la izquierda de c_1
- El punto c_1 está más cercano a la raíz!!

Bisección

Zoom del intervalo $[c_1\ b_1]:=[a_2\ b_2]$



c_2 es el punto medio entre a_2 y b_2

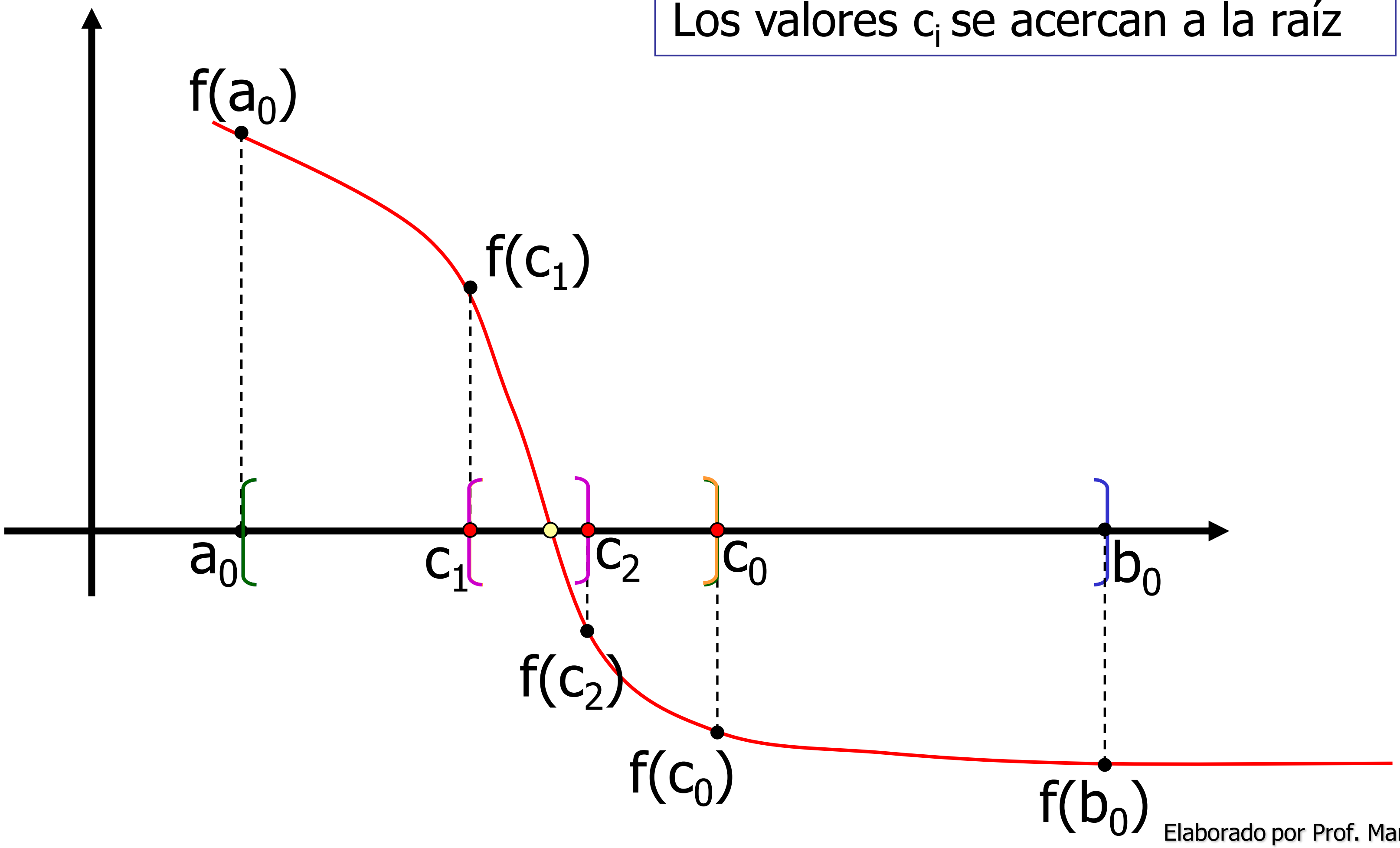
Observe que $f(a_2)*f(c_2) < 0$ y de $f(b_2)*f(c_2) > 0$

- La raíz está a la derecha de c_2
- El punto c_2 está más cercano a la raíz!!

Bisección

Proceso completo

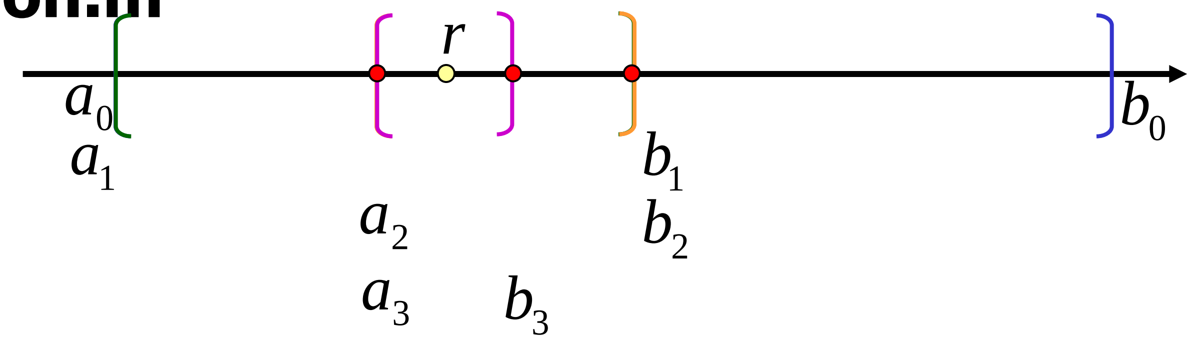
Los valores c_i se acercan a la raíz



Elaborado por Prof. Marlliny Monsalve

Bisección

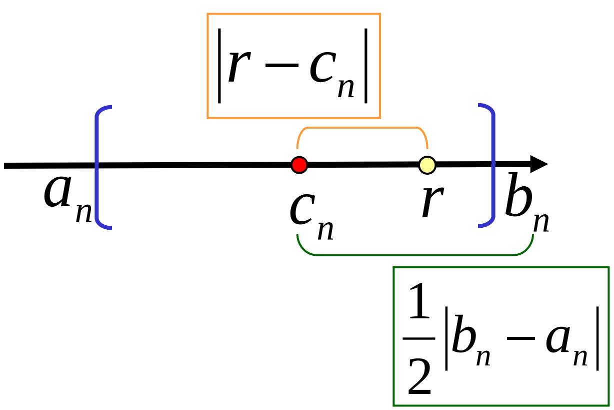
biseccion.m



$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le b_0$$

$$b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge a_0$$

$$b_{n+1} - a_{n-1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \quad \Rightarrow \quad b_{n+1} - a_{n-1} = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$



$$|r - c_n| \le \frac{1}{2}|b_n - a_n| \le \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|$$

Elaborado por Prof. Marlliny Monsalve

Bisección

TEOREMA: Si $[a_0,b_0], [a_1,b_1], \ldots, [a_n,b_n]$ denotan los intervalos en el método de bisección, entonces los límites $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$ existen, son iguales y representan un cero de f. Si $r = \lim_{n\to\infty} c_n$ y $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ entonces

$$|r - c_n| \le \frac{1}{2^{n+1}} |b_0 - a_0|$$

Bisección

¿Cuántas iteraciones deben hacerse (mínimo) para lograr que

Error relativo $\dfrac{|r-c_n|}{|r|} \leq tol$?

Se sabe que

- $r \in [a_0, b_0] \Rightarrow r > a_0 \Rightarrow \dfrac{1}{r} < \dfrac{1}{a_0} \Rightarrow \dfrac{|r-c_n|}{|r|} < \dfrac{|r-c_n|}{|a_0|}$
- $|r-c_n| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}|b_0-a_0|$ (del teorema)

Por tanto

$$\frac{|r-c_n|}{|r|} < \frac{|r-c_n|}{|a_0|} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \overbrace{\frac{|b_0-a_0|}{|a_0|}}^{K}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} K \leq tol \equiv \log_2(2^{-(n+1)}K) \leq \log_2(tol)$$

$$\Rightarrow n \geq \log_2(K) - \log_2(tol) - 1$$

Newton

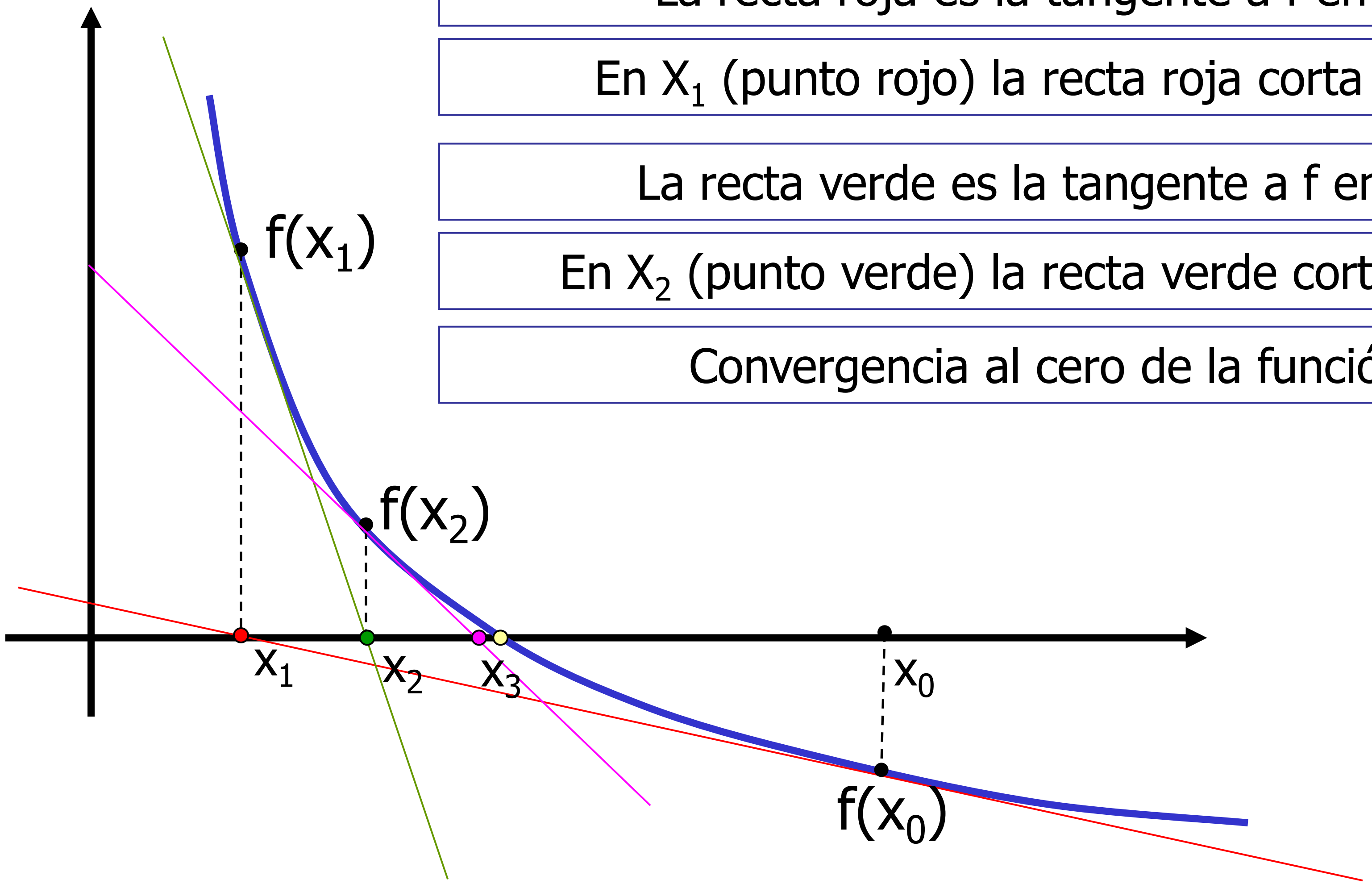
La recta roja es la tangente a f en $f(x_0)$

En X_1 (punto rojo) la recta roja corta la eje X

La recta verde es la tangente a f en $f(x_1)$

En X_2 (punto verde) la recta verde corta la eje X

Convergencia al cero de la función!!



Newton

En general conviene ver las rectas como aproximaciones lineales a la función

Taylor alrededor de c

$$f(x) = \overbrace{f(c) + f'(c)(x-c)}^{\text{recta}} + f''(x)\frac{(x-c)}{2} + \ldots$$

$$l(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$$

$$\boxed{l(c) = f(c)} \qquad \boxed{l'(c) = f(c)}$$

Sea x_n cercano a la raíz de la función

$$l(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$l(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Algoritmo 1 Método de Newton

1: Dado $x_0 \in \mathbb{R}$
2: **for** $n = 0, 1, \ldots,$ **do**
3: $\qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
4: **end for**

Newton

Algoritmo 1 Método de Newton

1: Dado $x_0 \in \mathbb{R}$
2: **for** $n = 0, 1, \ldots,$ **do**
3: $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
4: **end for**

- Paso 1: Resolver (variable p_n)

$$f'(x_n)p_n = -f(x_n)$$

- Paso 2:

$$x_{n+1} = x_n + p_n$$

Algoritmo 2 Método de Newton

1: Dado $x_0 \in \mathbb{R}$
2: **for** $n = 0, 1 \ldots,$ **do**
3: $\quad f'(x_n)p_n = -f(x_n)$ $\quad \triangleright$ Para p_n
4: $\quad x_{n+1} = x_n + p_n$
5: **end for**

Newton

TEOREMA: Sea f'' continua y r un cero simple de f. Hay una vecindad de r y una constante C tales que si el método de Newton se inicia en esa vecindad, los iterados generados por dicho método convergen a r y satisfacen

$$|x_{n+1}-r| \leq C|x_n - r|^2 \quad \forall n \geq 0$$

Conjunto Convexo: Un conjunto Ω es convexo si

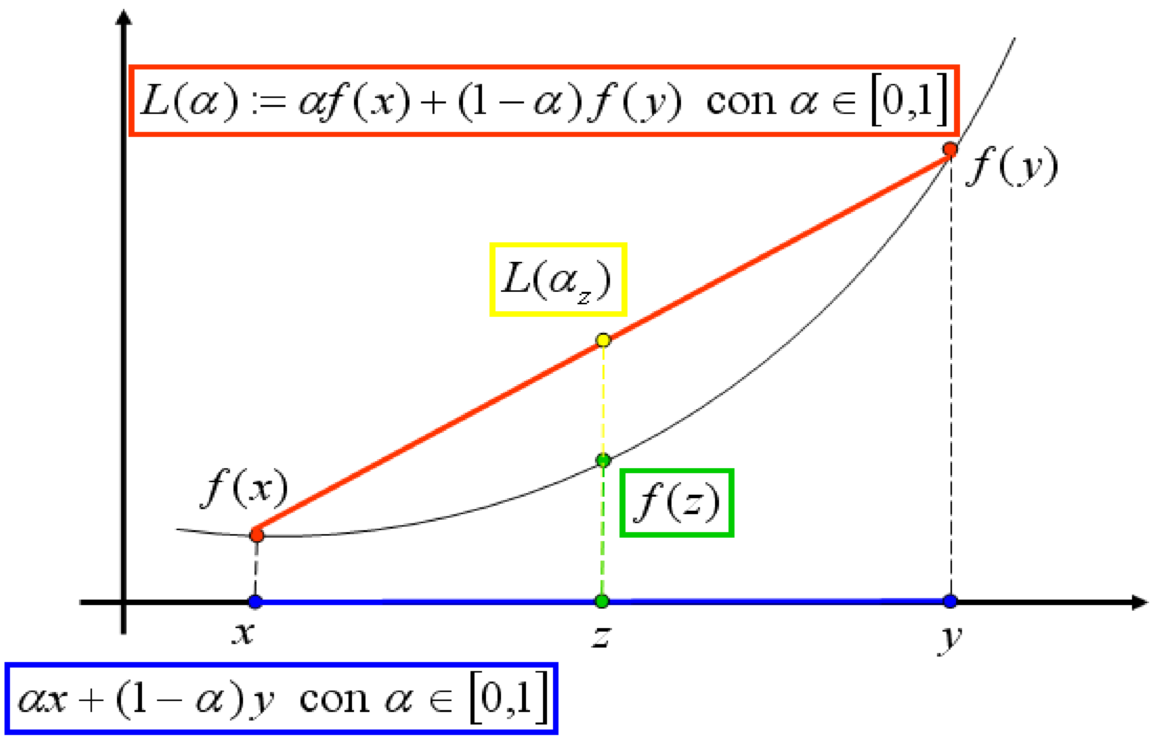
$$\forall x, y \in \Omega : [\alpha x + (1-\alpha)y \in \Omega],$$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Newton

Función Convexa: Sea $f:\Omega \rightarrow \Re$. f es convexa, si Ω es convexo y

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

para todo $x, y\in\Omega$ y $\alpha\in[0,1]$.



$$f(\alpha_z x+(1-\alpha_z)y)=f(z) \leq L(\alpha_z)=\alpha_z f(x)+(1-\alpha_z)f(y)$$

Elaborado por Prof. Marlliny Monsalve

Newton

TEOREMA: Si $f \in C^2[a,b]$ y además es creciente, convexa y tiene un cero, entonces el cero es único y la iteración de Newton convergerá a dicho cero desde cualquier iterado inicial

Secante

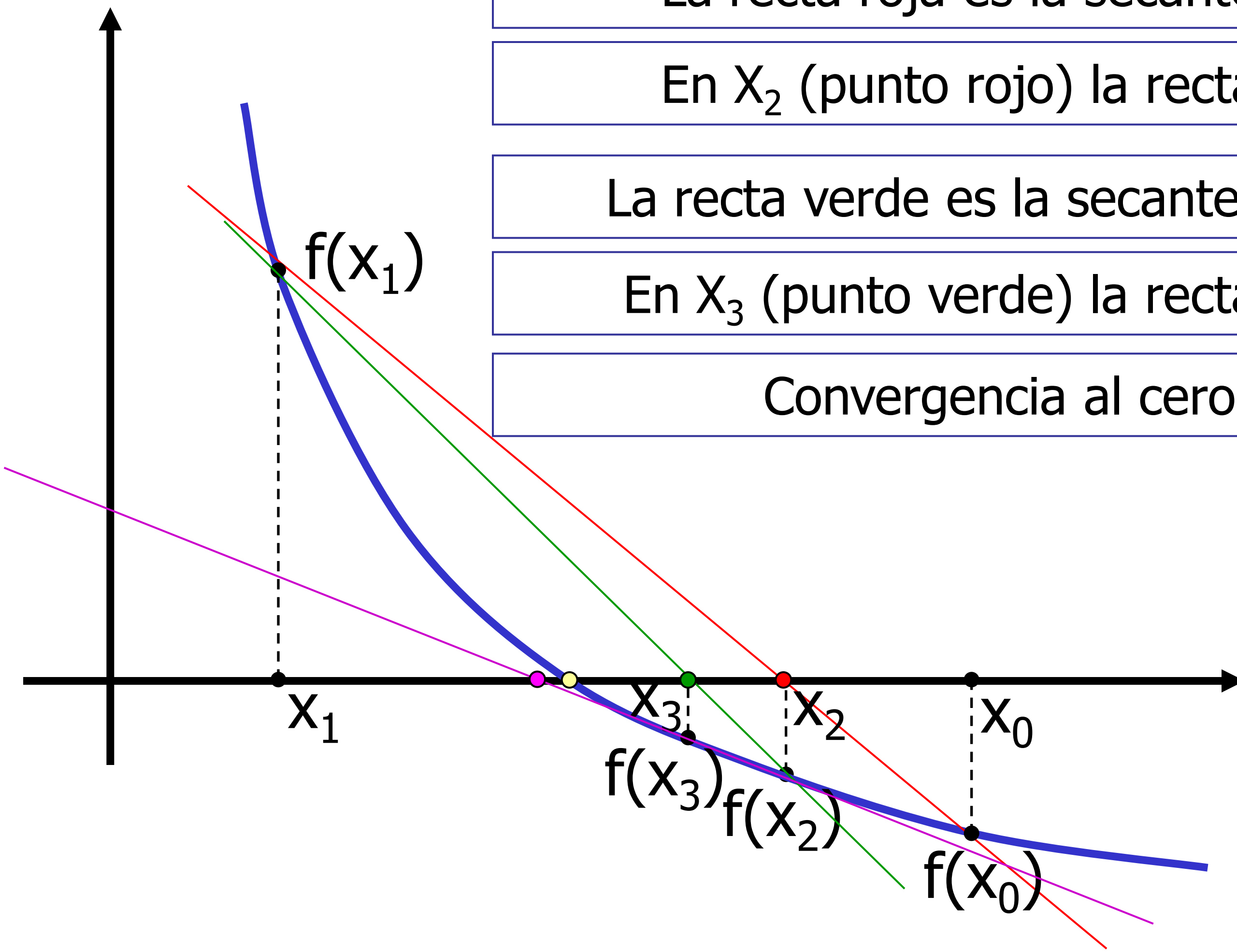
La recta roja es la secante a f en $f(x_0)$ y $f(x_1)$

En X_2 (punto rojo) la recta roja corta la eje X

La recta verde es la secante a f en $f(x_1)$ y en $f(x_2)$

En X_3 (punto verde) la recta verde corta la eje X

Convergencia al cero de la función!!



Elaborado por Prof. Marlliny Monsalve

Secante

DESVENTAJA DE NEWTON: Requiere de la derivada de la función!!

Derivada $f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\quad f'(x_n) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

Sean x_{n-1} y x_n cercanos a la raíz de la función

$$l(x) = f(x_n) + \left[\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\right](x - x_n)$$

Algoritmo 3 Método de la Secante

1: Dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$
2: **for** $n = 1, \ldots,$ **do**
3: $\quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right]$
4: **end for**

$$l(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\right]}$$

Secante

En general conviene ver las rectas como aproximaciones lineales a la función

Newton

Sea x_n cercano a la raíz

$$l(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$l(x_n) = f(x_n)$$

$$l(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Secante

Sea x_n cercano a la raíz

$$m(x) = f(x_n) + \boxed{a_n}(x - x_n)$$

$$m(x_n) = f(x_n) \qquad a_n \approx f'(x_n)$$

$$m(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{a_n}}$$

Secante

$$m(x) = f(x_n) + \boxed{a_n}(x - x_n)$$

Secante

¿Quién es a_n?

La recta es Secante, por tanto se elige tal que

$$\boxed{m(x_{n-1}) = f(x_{n-1})} \Rightarrow f(x_{n-1}) = f(x_n) + \boxed{a_n}(x_{n-1} - x_n)$$

Ecuación de la Secante

$$\Rightarrow a_n(x_{n-1} - x_n) = f(x_{n-1}) - f(x_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}}$$

Secante

Algoritmo 1 Método de Newton

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$
for $n = 0, 1, \ldots,$ **do**
  $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
end for

Algoritmo 3 Método de la Secante

Dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$
for $n = 1, \ldots,$ **do**
  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right]$
end for

Algoritmo 2 Método de Newton

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$
for $n = 0, 1 \ldots,$ **do**
  $\boxed{f'(x_n)p_n = -f(x_n)}$ ▷ Para p_n
  $x_{n+1} = x_n + p_n$
end for

Algoritmo 4 Método de la Secante

Dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$
$p_0 = x_1 - x_0$
$y_0 = f(x_1) - f(x_0)$
for $n = 1, \ldots,$ **do**
  $a_n p_{n-1} = y_{n-1}$ ▷ Para a_n
  $\boxed{a_n p_n = -f(x_n)}$ ▷ Para p_n
  $x_{n+1} = x_n + p_n$
  $y_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$
end for

$$\boxed{a_n p_n \approx f'(x_n)\, p_n}$$

Elaborado por Prof. Marlliny Monsalve

Secante

TEOREMA: Sea f'' continua y r un cero simple de f. Hay una vecindad de r y una constante C tales que si el método de la Secante se inicia en esa vecindad, los iterados generados por dicho método convergen a r y satisfacen

$$|x_{n+1} - r| \leq C|x_n - r||x_{n-1} - r| \quad \forall n \geq 1$$

$$|e_{n+1}| \approx A|e_n|^{(1+\sqrt{5})/2} \text{ con } A = \left[\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right]^{(-1+\sqrt{5})/2}$$

$\boxed{(-1+\sqrt{5})/2 \approx 1.62 < 2 \Rightarrow \text{Convergencia superlineal}}$

Tipo Secante

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{a_k}} \qquad \boxed{a_n \approx f'(x_n)}$$

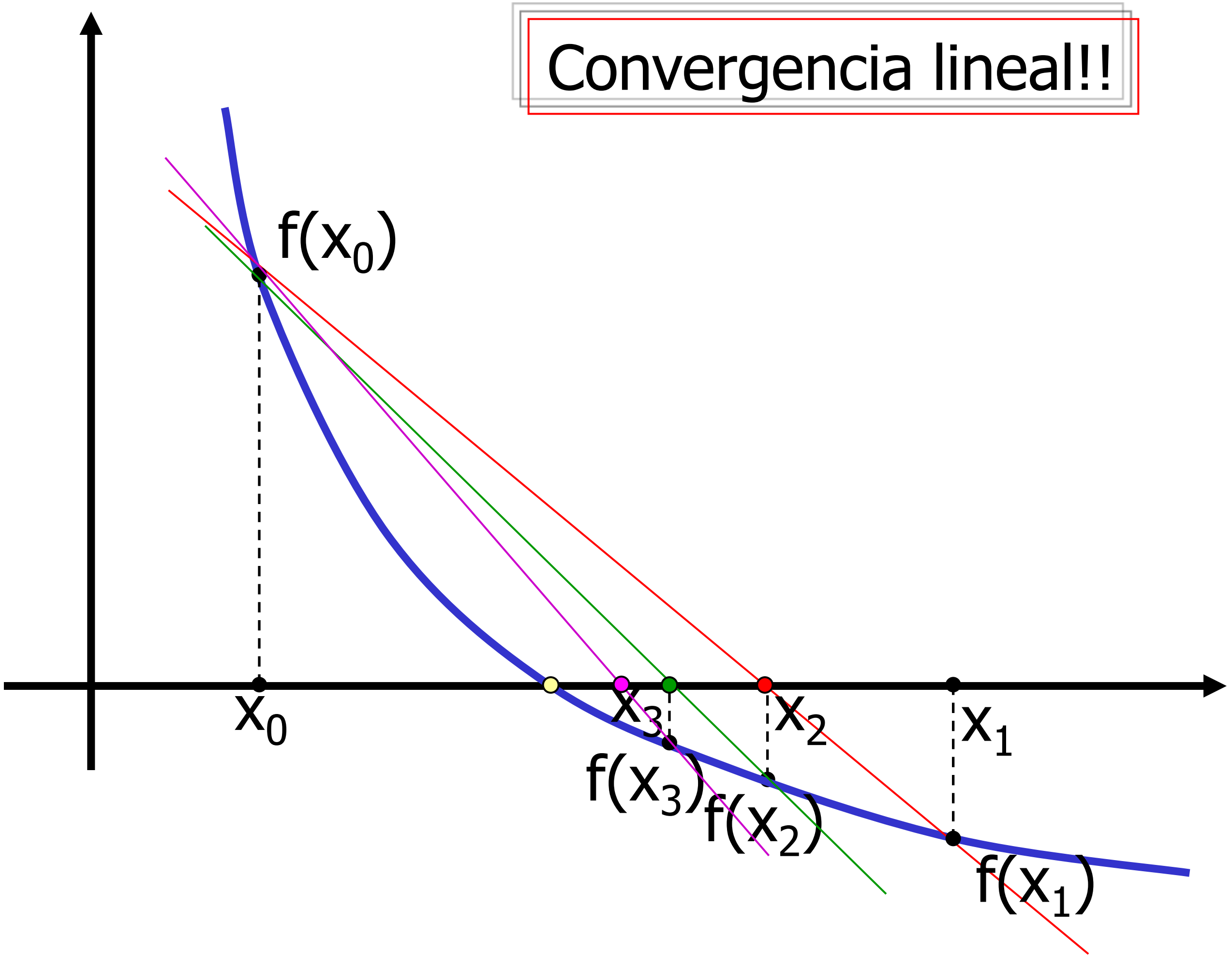
- Secante: $a_n = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ Para $n \geq 1$ y dados x_0, x_1
- Sttefenson: $a_n = \dfrac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_{n-1})}{f(x_n)}$ Para $n \geq 1$ y dado x_0
- Regula Falsi: $a_n = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n'})}{x_n - x_{n'}}$ Para $n \geq 1$ y dados x_0, x_1

donde n' es el máximo índice menor n que tal que

$$f(x_n) f(x_{n'}) < 0$$

Regula Falsi

Convergencia lineal!!



Elaborado por Prof. Marlliny Monsalve

Iteraciones de punto fijo

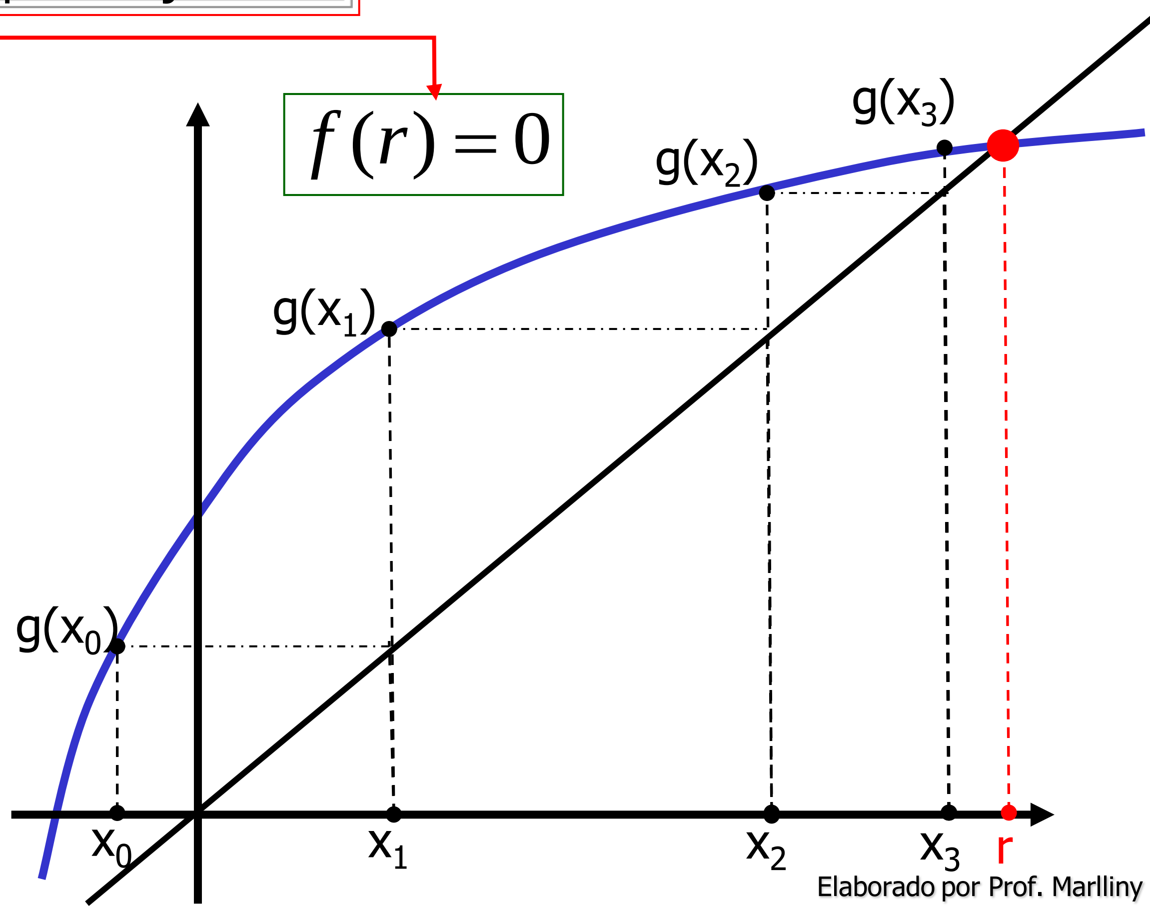
Sea $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$. Se dice que r es punto fijo de g si $g(r)=r$

Si r es punto fijo de g

$$f(x)=x-g(x)$$

$$f(r)=0$$

$$x_{k+1}=g(x_k)$$



Elaborado por Prof. Marlliny Monsalve

Iteraciones de punto fijo

Observaciones

- El resultado de evaluar g debe ser un punto en el dominio de g

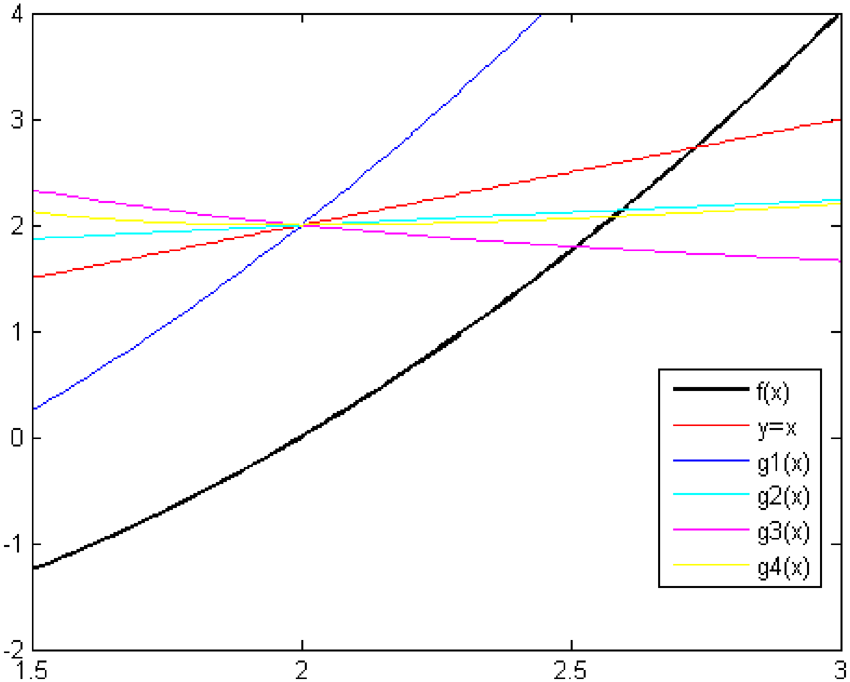
$$\boxed{g(x)=(3-x)/x} \qquad \boxed{g(3)=0} \qquad \boxed{g(0)=\infty}$$

$$g:[a,b]\rightarrow[a,b]$$

- Criterio posible de parada (en este contexto)

$$\left|x_{k-1}-x_k\right|$$

Iteraciones de punto fijo



$$f(x) = x^2 - x - 2$$

Raices 2 y -1

$$r = 2$$

$$y = x$$

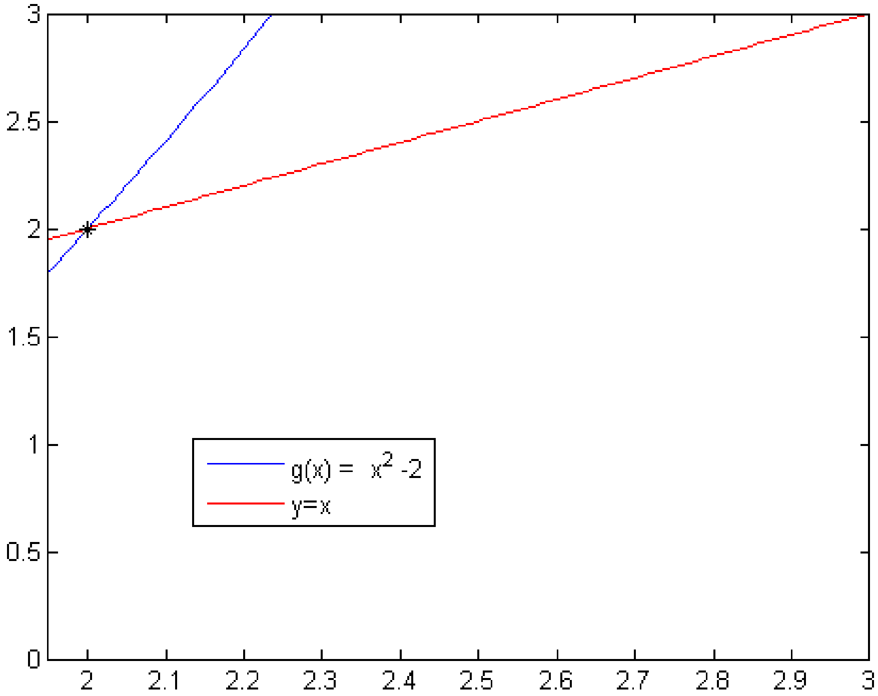
$$g_1(x) = x^2 - 2$$

$$g_2(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g_3(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

$$g_4(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$$

Iteraciones de punto fijo



$$y = x$$

$$g_1(x) = x^2 - 2$$

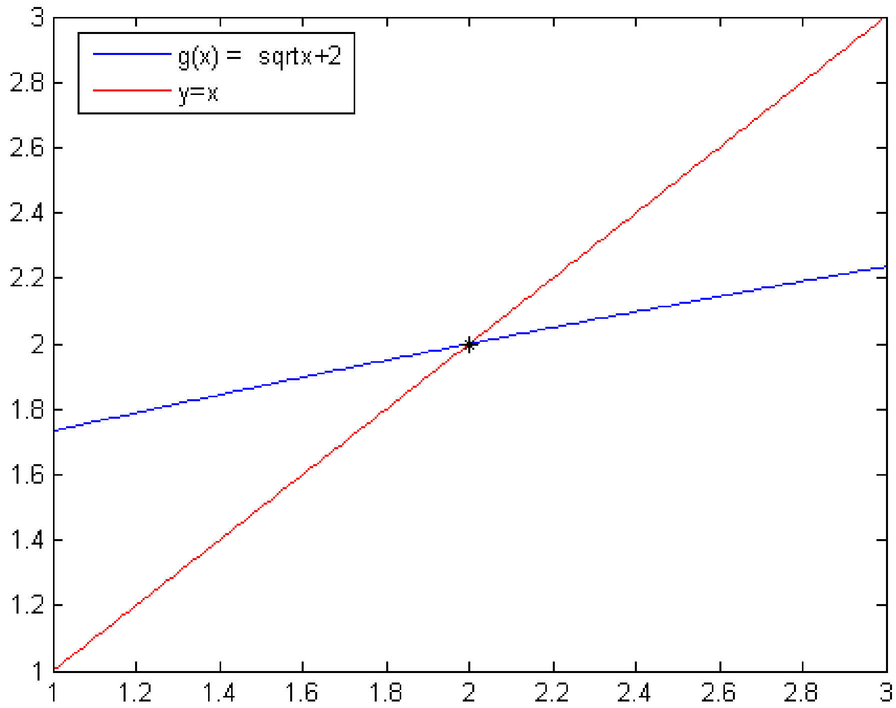
$$f(x) = x^2 - x - 2$$

Raices 2 y -1

$$r = 2$$

Elaborado por Prof. Marlliny Monsalve

Iteraciones de punto fijo



$$\boxed{y = x}$$

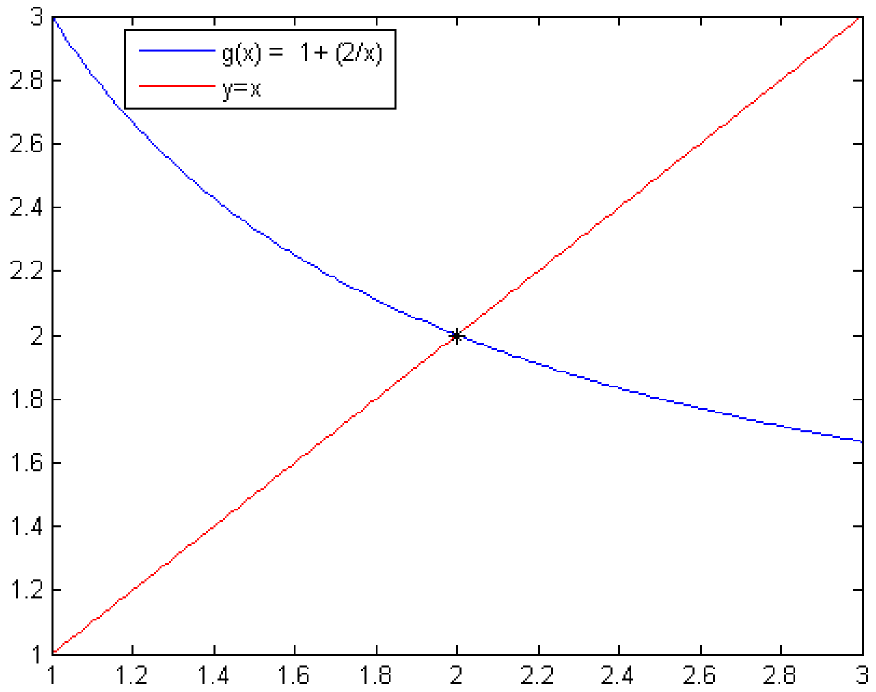
$$\boxed{g_2(x) = \sqrt{x+2}}$$

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

Raices 2 y -1

$$r = 2$$

Iteraciones de punto fijo



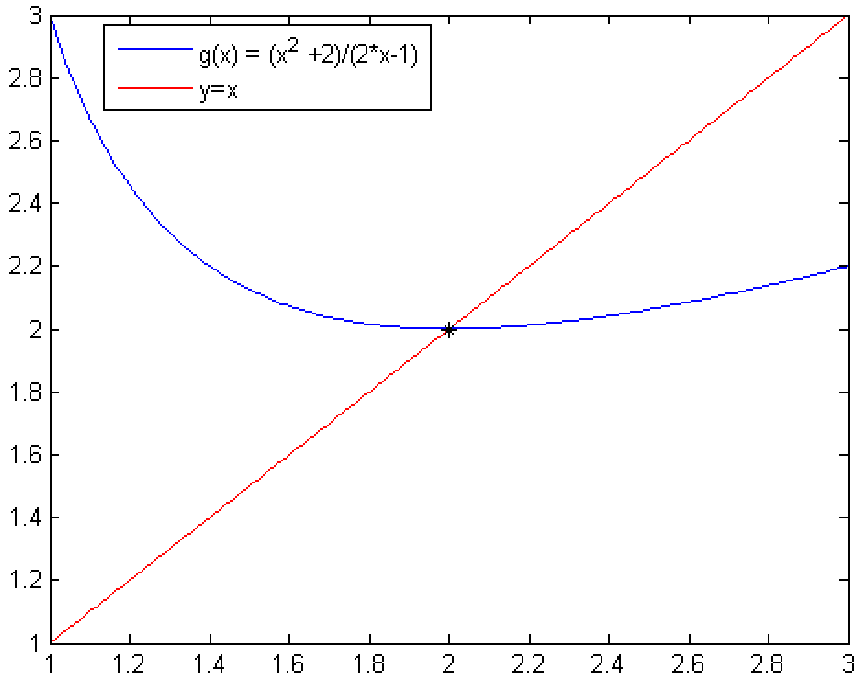
$$y = x$$

$$g_3(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

$$f(x) = x^2 - x - 2$$ Raices 2 y -1

$$r = 2$$

Iteraciones de punto fijo



$$\boxed{y = x}$$

$$\boxed{g_4(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}}$$

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

Raices 2 y -1

$$r = 2$$

Iteraciones de punto fijo

Función Contractiva: g es contractiva si existe $0<\lambda<1$ tal que $|g(x)-g(y)|\leq \lambda|x-y| \quad \forall x, y$ en el dominio de g

TEOREMA (Convergencia): Sea $g:[a,b]\rightarrow[a,b]$ una función contractiva. Entonces g tiene un único punto fijo r. Más aún toda secuencia $\{x_k\}_{k\geq 0}$ generada por $x_{k+1}=g(x_k)$ converge a r desde cualquier iterado inicial x_0. Además

$$e_k=|x_k-r|\leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda}|x_1-x_0|$$

Iteraciones de punto fijo

TEOREMA (Convergencia local): Sea $g:[a,b]\rightarrow[a,b]$

Suponga que r es un punto fijo de g en $[a,b]$ y asuma que g tiene derivada continua alrededor de r con $|g'(x_*)|<1$

Entonces la secuencia $\{x_k\}_{k\geq 0}$ generada por $x_{k+1}=g(x_k)$ converge a r si x_0 está suficientemente cerca de r

Iteraciones de punto fijo

TEOREMA (Velocidad): Bajo las hipótesis del Teorema anterior y si además $g \in C^{(n+1)}$ en una vecindad de r y $g^{(i)}(r) = 0$ con $1 \leq i \leq n$ y $g^{(n+1)}(r) \neq 0$ entonces la iteracion de punto fijo $x_{k+1} = g(x_k)$ tiene orden de convergencia $n+1$ y además

$$\lim_{k \to \infty} \left. |e_{k+1}| \middle/ |e_k|^{(n+1)} \right. = \frac{\left| g^{(n+1)}(r) \right|}{(n+1)!}$$

Convergencia al menos (n+1)!!

Bibliografía consultada

- D. Kincaid and W. Cheney. *Análisis Numérico*. Addison-Wesley Iberoamericana. 1991
- A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer. 1991
- J. E. Dennis, Jr. and R. B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM. 1996.
- J. Nocedal, S. Wright. *Numerical Optimization (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering)*. Springer. 2006
- G. Dahlquist and A. Björck. *Numerical Methods in Scientific Computing. Volume I*. SIAM. 2006