



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Aceleración Espectral del Método de Cimmino

Trabajo Especial de Grado presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela por el
Br. Alessandra Fariñas Colmenares para
optar al título de Licenciado en Matemática.
Tutor: Prof. Luis Manuel Hernández R.

Caracas - Venezuela
8 de Octubre de 2008.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Aceleración Espectral del Método de Cimmino**”, presentado por el **Br. Alessandra Fariñas Colmenares**, titular de la Cédula de Identidad **V-16.904.219**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

Prof. Luis Manuel Hernández R.
Tutor

Dr. Marcos Raydan
Jurado

Dr. Ramón Bruzual
Jurado

Para: Alex y Vin

Una teoría puede probarse mediante experimentos; pero no hay ningún camino que conduzca de los experimentos a la teoría.

- **Albert Einstein**

Agradecimientos

Agradezco principalmente al Prof. Luis Manuel Hernández por todo su interés, tutoría y colaboración. También gracias a todos mis familiares, ellos fueron mi guía y motivación.

Estoy muy agradecida con Luigi Verdino que siempre me acompañó dándome su apoyo incondicional y asesoría, también con mis amistades de la Universidad Dennis Contreras, Jocelyn León, Adrian Hernández y Julián Rojas, quienes me apoyaron y alentaron.

Índice general

Resumen	1
Introducción	2
1. PRELIMINARES	4
1.1. Teorema de Proyección	5
1.2. Propiedades de la proyección métrica sobre subespacios	7
1.2.1. Caracterización	7
1.2.2. Linealidad	7
1.2.3. Principio de Reducción	8
1.2.4. Algunas propiedades del producto de proyecciones métricas	9
2. EL METODO DE PROYECCIONES ALTERNANTES	11
2.1. Interpretación geométrica	13
2.2. Una formulación equivalente	14
2.3. El ángulo entre subespacios de un espacio de Hilbert	14
2.4. Velocidad de Convergencia	17
2.5. Aceleración del MAP	19
2.6. El Método de Kaczmarz	20
2.7. El Método de Cimmino	20
3. METODOS DE OPTIMIZACION	24
3.1. Matrices simétricas y positivo definidas	24
3.2. Funciones cuadráticas	25
3.3. Métodos clásicos para cuadráticas	26
3.3.1. Método de Cauchy	27
3.3.2. Método de Newton	28
3.4. Método del Gradiente Espectral	28
3.4.1. El Método del Gradiente Espectral	29
3.4.2. Gradiente Espectral caso cuadrático	30
3.4.3. Análisis de convergencia	31
3.4.4. Aplicaciones y extensiones	32

4. PROBLEMAS DE PUNTO DE ENSILLADURA	33
4.1. Principales aplicaciones para problemas de punto de ensilladura	34
4.2. Propiedades de las matrices de punto de ensilladura	35
4.2.1. Factorización por bloques del complemento de Schur	35
4.2.2. Condición para la existencia de la inversa de la matriz de punto de ensilladura	35
4.2.3. Inversa de una matriz de punto de ensilladura	36
4.3. Métodos clásicos para la resolución de problemas de punto de ensilladura . . .	37
5. METODO DE CIMMINO ACELERADO PARA PROBLEMAS DE PUNTO DE ENSILLADURA	39
5.1. Resolución de problemas de punto de ensilladura por el método de Cimmino .	40
5.2. Aceleración del método de Cimmino	41
5.3. Cimmino-Cauchy y Cimmino-Barzilai-Borwein	42
6. EXPERIMENTACION NUMERICA	43
6.1. Resultados	45
6.2. Comparación de los métodos	69
Conclusiones	71
Bibliografía	72

Resumen

El método de Cimmino es visto como un método de minimización de una cierta función cuadrática. En particular, se prueba que el método de Cimmino equivale a un método de descenso que utiliza la dirección del gradiente negativo y una longitud de paso constante. Esto explicaría la lenta convergencia que se observa generalmente en este método. En este trabajo se propone acelerar la convergencia del método de Cimmino utilizando la misma dirección de descenso, pero sustituyendo el tamaño de paso por escogencias basadas en métodos espectrales, tales como la elección hecha en el método propuesto por Barzilai-Borwein. Se realizan experimentos numéricos en una aplicación importante que es la resolución de problemas de punto de ensilladura (Saddle point problems).

Introducción

Un problema muy común en diversas áreas de las matemáticas y las ciencias físicas consiste en intentar encontrar un punto en la intersección de conjuntos convexos. Este problema se denomina problema de factibilidad convexa y su formulación matemática es la siguiente:

Sea X un espacio de Hilbert y C_1, C_2, \dots, C_N subconjuntos convexos cerrados con intersección no vacía C :

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_N \neq \emptyset.$$

El problema de factibilidad convexa sería encontrar algún punto x en C .

Otro problema que aparece con frecuencia en esas áreas es el de mejor aproximación, que se define de la siguiente manera:

Sea X un espacio de Hilbert, C la intersección de N conjuntos convexos cerrados y $x \in X$, un elemento $y_0 \in C$ es llamado una mejor aproximación de x a C si

$$\|x - y_0\| = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Para la resolución de estas dos clases de problemas se suelen usar métodos iterativos; estos generan una sucesión $\{x_k\}_{k \geq 1} \in X$ que converge a la solución. Generalmente, en los problemas de factibilidad se utilizan métodos iterativos basados en proyecciones métricas, como el de proyecciones alternantes y el de Cimmino, por otro lado, está el método de Dykstra, el cual es una variante del método de proyecciones alternantes que sirve para la resolución de los problemas de mejor aproximación. Si se restringen los conjuntos convexos a subespacios, entonces el método de proyecciones alternantes y el de Cimmino resuelven de manera simultánea el problema de factibilidad y el de mejor aproximación.

La velocidad de convergencia de los métodos antes nombrados depende del ángulo entre los subespacios concernientes; cuando este es pequeño, tanto el método de proyecciones alternantes como el de Cimmino tienden a ser lentos, por lo tanto es conveniente acelerarlos. Entre algunos de los esquemas de aceleración del método de proyecciones alternantes está el de W. B. Gearhart y M. Koshy [25] y el de L. M. Hernández [32, 47]. La realización de un esquema de aceleración para el método de Cimmino es presentada como objetivo general de este trabajo.

El procedimiento es interpretar el método de Cimmino como la minimización de una función con longitud de paso constante y la dirección del gradiente negativo, posteriormente utilizar técnicas de optimización más avanzadas como el método del gradiente espectral, para así lograr su aceleración. Por último, se experimenta con la búsqueda de solución a problemas de punto de ensilladura, siendo esta una aplicación de importancia en la actualidad; estos problemas surgen en numerosas áreas de la ciencia y la ingeniería, como por ejemplo:

Reconstrucción de imágenes [27], dinámica de fluidos computacional [26, 42], economía [2, 20], electromagnetismo [7], etc.

A lo largo de este documento, el autor presenta una recopilación teórica basada en la investigación del Prof. L. M. Hernández mostrada en el capítulo 5, finalmente realiza una parte experimental usando las referencias mostradas en el capítulo 6.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo se presentan definiciones y teoremas preliminares sobre proyecciones; utilizando como base el libro y artículo de F. Deutsch [17, 16] y la guía de M. Domínguez y R. Bruzual [19].

Definición 1 *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno en donde toda sucesión de Cauchy converge con respecto a la norma dada por el producto interno.*

Definición 2 *Un subconjunto K de H es convexo si $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$, siempre que $x, y \in K$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Geoméricamente, un conjunto es convexo si y solo si contiene el segmento de recta

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Definición 3 *Sea V un espacio vectorial, S es un subespacio vectorial de V si y solo si:*

- *S no es un conjunto vacío.*
- *S es igual o está contenido en V .*
- *$\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \vec{y} \in S \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S$*
- *Si α es un escalar y $\vec{x} \in S \Rightarrow \alpha \cdot \vec{x} \in S$.*

El resultado a continuación es una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores.

Corolario 1 *Todo subespacio es un conjunto convexo.*

Definición 4 *Dado un espacio de Hilbert H y un conjunto M de H , el complemento ortogonal de M se define como*

$$M^\perp = \{z \in H \mid \langle z, x \rangle = 0 \quad \forall x \in M\}.$$

Definición 5 *Sea K un subconjunto no vacío de un espacio con producto interno X y sea $x \in X$. Un elemento $y_0 \in K$ es llamado **mejor aproximación** si*

$$\|x - y_0\| = d(x, K),$$

donde $d(x, K) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in K\}$. El número $d(x, K)$ es llamado distancia de x a K o error aproximado de x a K .

El conjunto de las mejores aproximaciones de x a K puede ser vacío y es denotado por $P_K(x)$. De esta manera

$$P_K(x) = \{y \in K \mid \|x - y\| = d(x, K)\}.$$

Esto define una función P_K de X a subconjuntos de K denominada **proyección métrica** sobre K .

Si cada $x \in X$ posee al menos una mejor aproximación en K , entonces K es llamado un **proximal**, en el caso de que cada $x \in X$ posea exactamente una sola mejor aproximación entonces K es llamado **conjunto Chebyshev**. Así K es un conjunto Proximal si y solo si $P_K(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$ y es Chebyshev si y solo si para cada $x \in X$ el conjunto $P_K(x) \neq \emptyset$ y además tiene cardinalidad 1.

Teorema 1 *Sea K un conjunto convexo cerrado de un espacio de Hilbert H , entonces cada $x \in X$ posee solo una mejor aproximación sobre K .*

El teorema anterior indica que todo conjunto convexo cerrado es un conjunto Chebyshev, a la vez como una consecuencia de la unicidad, se establece que la función proyección está bien definida sobre estos conjuntos; su prueba puede ser encontrada en [17].

En particular, los subespacios cerrados al ser conjuntos convexos son por ende conjuntos Chebyshev. Por ser de importancia para nuestro trabajo, vamos a demostrar aquí este hecho llamado teorema de proyección para este caso particular, aunque su demostración se desprende inmediatamente del teorema anterior.

1.1. Teorema de Proyección

El teorema de proyección [19]; garantiza la existencia y unicidad de la proyección de un elemento $x \in H$ sobre un subespacio M .

Para la comprensión de este teorema es útil saber que si A y B son subconjuntos no vacíos de H , se dice que H es una suma ortogonal de A y B , y se escribe $H = A \boxplus B$, si cada $x \in H$ tiene una única representación de la forma $x = a + b$, donde $a \in A$, $b \in B$ y $a \perp b$. Se dice que H es una suma directa de A y B y se escribe $H = A \oplus B$, si cada $x \in H$ tiene una única representación de la forma $x = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Nótese que si A y B son subespacios, entonces $H = A \oplus B$ si y solo si $H = A + B = \{x \mid x = a + b, \text{ donde } a \in A \text{ y } b \in B\}$ y $A \cap B = \{0\}$.

Teorema 2 *(Teorema de Proyección para Subespacios) Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H , entonces para cada $x \in H$ existe un único $y \in M$ y un único $z \in M^\perp$ tal que $x = y + z$; es decir, $H = M \oplus M^\perp$. Además*

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, M).$$

El vector y es denominado como la proyección ortogonal de x sobre M .

Demostración. Sea $x \in H$, el conjunto $x + M$ es un subconjunto de H cerrado, convexo y no vacío, por lo tanto posee un elemento de norma mínima; hecho que se puede verificar en [19]. Sea $z \in x + M$, el elemento de norma mínima, entonces existe $m_0 \in M$ tal que

$$z = x + m_0.$$

Sea $y = -m_0$ entonces $y \in M$ y $x = y + z$. Probaremos que $z \in M^\perp$.

Sean $m \in M$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| = 1$ y

$$\lambda \langle m, z \rangle = |\langle m, z \rangle|.$$

Para $t \in \mathbb{R}$ y tomando el hecho de que z es de norma mínima se tiene que

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\leq \|z - t\lambda m\|^2 = \langle z - t\lambda m, z - t\lambda m \rangle \\ &= \|z\|^2 - t\lambda \langle m, z \rangle - t\bar{\lambda} \langle m, z \rangle + t^2 |\lambda|^2 \|m\|^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$0 \leq -2t |\langle m, z \rangle| + t^2 \|m\|^2.$$

Si $\|m\| = 1$ y $t > 0$ entonces

$$0 \leq 2 |\langle m, z \rangle| \leq t.$$

Tomando límite cuando t tiende a 0, obtenemos que

$$\langle m, z \rangle = 0$$

para todo $m \in M$ tal que $\|m\| = 1$. De esto se puede deducir que $z \in M^\perp$.

A continuación se probarán las otras desigualdades. Como $\langle y, z \rangle = 0$ se sigue que

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle y + z, y + z \rangle = \langle y, y \rangle + \langle z, z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

Además

$$\|x - y\| = \|z\| = \inf_{w \in x+M} \|w\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| = d(x, M).$$

Para la unicidad supóngase que $y + z = y' + z'$ con $y, y' \in M$ y $z, z' \in M^\perp$ entonces

$$\overbrace{y - y'}^{\in M} = \underbrace{z - z'}_{\in M^\perp} = 0$$

por lo tanto $y = y'$ y $z = z'$.

1.2. Propiedades de la proyección métrica sobre subespacios

El siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [17], establece propiedades importantes.

Teorema 3 *Sea M un subespacio cerrado en H entonces:*

1. M^\perp es un subespacio cerrado.
2. $x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$ para cada $x \in H$, es decir, $I = P_M + P_{M^\perp}$.
Además esta representación es única en el sentido de que si $x = y + z$ donde $y \in M$ y $z \in M^\perp$, entonces $y = P_M(x)$ y $z = P_{M^\perp}(x)$.
3. $\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$ para todo x . Así, $\|x\|^2 = d(x, M)^2 + d(x, M^\perp)^2$.
4. $M^\perp = \{x \in H \mid P_M(x) = 0\}$ y $M = \{x \in H \mid P_{M^\perp}(x) = 0\} = \{x \in H \mid P_M(x) = x\}$.
5. $\|P_M(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in H$; $\|P_M(x)\| = \|x\|$ si y solo si $x \in M$.
6. $M^{\perp\perp} = M$.
7. $P_M(x) = x - P_{M^\perp}(x)$

1.2.1. Caracterización

Cuando M es un subespacio cerrado, P_M se conoce como proyección ortogonal sobre M debido a la siguiente propiedad

$$\langle x - P_M(x), y \rangle = 0 \quad \forall y \in M$$

Esto es, $x - P_M(x)$ es ortogonal a M , por lo tanto, $x - P_M(x) \in M^\perp$. A la vez, el operador P_M es lineal, autoadjunto ($P_M^* = P_M$) e idempotente ($P_M^2 = P_M$); características que se justificarán en la sección 1.2.2.

1.2.2. Linealidad

Las proyecciones sobre subespacios, adquieren diversas propiedades derivadas de su linealidad, que no se pueden generalizar para cualquier conjunto convexo.

Definición 6 *Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Decimos que T es un operador acotado cuando existe $c > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \text{para todo } x \in X$$

Teorema 4 *Sea M un subespacio cerrado en un espacio de Hilbert H , entonces:*

1. P_M es un operador acotado y $\|P_M\| = 1$ (a menos que $M = \{0\}$, en este caso $\|P_M\| = 0$).
2. P_M es idempotente: $P_M^2 = P_M$.
3. P_M es autoadjunta:

$$\langle P_M(x), y \rangle = \langle x, P_M(y) \rangle \quad \text{para todo } x, y \text{ en } H \quad (1.1)$$

4. para cada $x \in H$

$$\langle P_M(x), x \rangle = \|P_M(x)\|^2. \quad (1.2)$$

5. P_M es no-negativa:

$$\langle P_M(x), x \rangle \geq 0 \quad \text{para cada } x \quad (1.3)$$

Demostración.

1. Sea $x, y \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene que $x - P_M(x)$ y $y - P_M(y)$ están en M^\perp . Como M^\perp es un subespacio,

$$\alpha x + \beta y - [\alpha P_M(x) + \beta P_M(y)] = \alpha(x - P_M(x)) + \beta(y - P_M(y)) \in M^\perp.$$

Pues $\alpha P_M(x) + \beta P_M(y) \in M$, por linealidad del operador de proyección se tiene que $\alpha P_M(x) + \beta P_M(y) = P_M(\alpha x + \beta y)$ por la parte (5) del teorema (3) se tiene que $\|P_M(x)\| \leq \|x\|$ para todo x . Así P_M está acotado y $\|P_M\| \leq 1$. Como $P_M(y) = y$ para cada $y \in M$, $\|y\| = \|P_M(y)\| \leq \|P_M\| \|y\|$ implica que $\|P_M\| \geq 1$ y así $\|P_M\| = 1$.

2. $P_M(P_M(x)) = P_M(x)$ para todo x ya que para cada $y \in M$ se tiene que $y = P_M(y)$.
3. Para $x, y \in H$ se tiene que $\langle P_M(x), y - P_M(y) \rangle = 0$, y así

$$\langle P_M(x), y \rangle = \langle P_M(x), P_M(y) \rangle. \quad (1.4)$$

Intercambiando los roles de x e y en (1.4), se obtiene

$$\langle x, P_M(y) \rangle = \langle P_M(y), x \rangle = \langle P_M(y), P_M(x) \rangle = \langle P_M(x), P_M(y) \rangle = \langle P_M(x), y \rangle.$$

4. Se deduce tomando $x = y$ en (1.4)
5. Usando (4) se observa que $\langle P_M(x), x \rangle = \|P_M(x)\|^2 \geq 0$ por lo tanto P_M es no-negativa.

1.2.3. Principio de Reducción

Teorema 5 Sea K un subconjunto convexo de un espacio de Hilbert H y sea M un subespacio de H que contiene a K . Entonces :

1. $P_K P_M = P_K = P_M P_K$,
2. $d(x, K)^2 = d(x, M)^2 + d(P_M(x), K)^2$ para cada $x \in H$.

Demostración. Se observa que $P_K = P_M P_K$ es cierto, pues $K \subset M$. Para probar (2) sea $y \in K$, se tiene que $y \in M$ y $x - P_M(x) \in M^\perp$ entonces:

$$\|x - y\|^2 = \|x - P_M(x)\|^2 + \|P_M(x) - y\|^2. \quad (1.5)$$

Como el primer término a la derecha de (1.5) es independiente de y , se sigue que $y \in K$ minimiza $\|x - y\|^2$ si y solo si minimiza $\|P_M(x) - y\|^2$. Esto prueba que $P_K(x)$ existe si y solo si $P_K(P_M(x))$ existe y $P_K(x) = P_K(P_M(x))$. Así $P_K(x) = \emptyset$ si y solo si $P_K(P_M(x)) = \emptyset$. En este caso, (1) se verifica. Tomando esto en cuenta y (1.5) se obtiene (2).

1.2.4. Algunas propiedades del producto de proyecciones métricas

Los siguientes lemas se usan comunmente al trabajar con proyecciones; sus demostraciones se pueden encontrar en el artículo de F. Deutsch [18], en Halmos [28] o Debnath y Mikusinski [14].

Lema 1 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. P_M y P_N conmutan: $P_M P_N = P_N P_M$
2. $P_M P_N = P_{M \cap N}$.
3. $P_M P_N$ es una proyección ortogonal.

Lema 2 *Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. $P_M P_N = 0$;
2. $P_N P_M = 0$;
3. $M \perp N$ (i.e., $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in M, y \in N$).

Lema 3 *Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. $P_M P_N = P_M$;
2. $P_N P_M = P_M$;
3. $M \subset N$.

En particular tanto P_M y P_N conmutan con $P_{M \cap N}$, y $P_M P_{M \cap N} = P_{M \cap N} = P_N P_{M \cap N}$.

Lema 4 *Si P_M y P_N conmutan, entonces*

$$P_{\overline{M+N}} = P_M + P_N - P_M P_N.$$

Como consecuencia si $M \subset N^\perp$, entonces $M + N$ es cerrado y

$$P_{M+N} = P_M + P_N.$$

Lema 5 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. P_M conmuta con P_N ;
2. P_{M^\perp} conmuta con P_N ;
3. P_M conmuta con P_{N^\perp} ;
4. P_{M^\perp} conmuta con P_{N^\perp} ;
5. $M = M \cap N + M \cap N^\perp$.

Capítulo 2

EL METODO DE PROYECCIONES ALTERNANTES

Este capítulo trata lo concerniente al método de proyecciones alternantes utilizando como fundamento el artículo de F. Deutsch [16] y el libro de R. Escalante y M. Raydan [21].

El método de proyecciones alternantes, fue propuesto originalmente por John Von Neumann [49], quien trató el problema de encontrar la proyección de un punto dado en un espacio de Hilbert sobre la intersección de dos subespacios cerrados. Tiempo después, Cheney y Goldstein [12] hicieron una extensión del análisis del esquema propuesto por Von Neumann al caso de dos conjuntos convexos cerrados. En particular, ellos establecieron la convergencia del método sobre hipótesis débiles.

Uno de los resultados obtenidos por Von Neumann es el siguiente:

Teorema 6 Sean A y B subespacios de H entonces $P_A P_B = P_B P_A$ si y solo si $P_A P_B = P_{A \cap B}$. En otras palabras P_A y P_B conmutan si y solo si su composición es también una proyección ortogonal.

En particular, Von Neumann estaba interesado en el caso de que P_A y P_B no conmutaran. Von Neumann probó el siguiente teorema:

Teorema 7 (Von Neumann 1933) Para cada $x \in H$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_B P_A)^n x = P_{A \cap B} x. \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) sugiere un algoritmo, llamado Método de Proyecciones Alternantes o “MAP” para abreviar.

Es decir, que para cualquier $x \in H$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_0 &= x && \text{y} \\ x_n &= P_B P_A x_{n-1} && (= (P_B P_A)^n x) \\ \text{para } n &= 1, 2, \dots && \text{Entonces } x_n \rightarrow P_{A \cap B} x \end{aligned}$$

Algorithm 1: Algoritmo MAP

Data: Seleccionar $x_0 \in H$
for $k = 0, 1, \dots$, **do**
 $\lfloor x_n = P_B P_A x_{n-1}$

Este resultado se puede generalizar de la siguiente manera:

Teorema 8 (Halperin (1962)) Para cada $x \in H$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{M_k} P_{M_{k-1}} \cdots P_{M_1})^n x = P_{\bigcap_{i=1}^k M_i} x.$$

Si M_1, M_2, \dots, M_k son subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H , $M = \bigcap_{i=1}^k M_i$ y $P_i = P_{M_i}$. Con el uso del teorema de Halperin se puede encontrar $P_M x$ (mejor aproximación desde la intersección M a cualquier $x \in H$), realizando un ciclo a través de cada subespacio M_i .

$x_0 = x$	$x_{k+1} = P_1 x_k$
$x_1 = P_1 x_0$	$x_{k+2} = P_2 x_{k+1}$
$x_2 = P_2 x_1$	\vdots
\vdots	
$x_k = P_k x_{k-1}$	

Una forma compacta sería, $x_0 = x$ y

$$x_n = P_{[n]}(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

donde $[n] = \{1, 2, \dots, k\} \cap \{n - jk \mid j = 0, 1, 2, \dots\}$.

Otra manera de interpretar la extensión de Halperin, es considerando una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ tal que $x_n \rightarrow P_M x$ cuando $n \rightarrow \infty$. En particular, para una subsucesión $\{x_{n_k}\}$, se observa que para cada $x \in H$

$$\lim_n \|(P_k \cdots P_2 P_1)^n x - P_M x\| = 0 \quad (2.2)$$

Es decir, si $x \in H$, $(P_k \cdots P_2 P_1)^n x$ converge a $P_M x$.

La velocidad con la que $(P_k \cdots P_2 P_1)^n x$ tiende a $P_M x$ para cada $x \in H$ depende de la norma del operador $(P_k \cdots P_2 P_1)^n - P_M$ que implícitamente depende de los ángulos formados entre los subespacios; por lo tanto dicha convergencia puede ser arbitrariamente lenta. Un ejemplo para visualizar este fenómeno es el siguiente: si $k = 2$ existen subespacios M_1 y M_2 de tal manera

que si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión cualquiera de números reales con $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > \dots > 0$ y $\lambda_n \rightarrow 0$, entonces existe $x_0 \in H$ tal que

$$\|(P_2 P_1)^n x_0 - P_{M_1 \cap M_2} x_0\| \geq \lambda_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Sin embargo, el MAP ha encontrado una amplia aplicación en al menos una docena de áreas distintas de las matemáticas como resolver sistemas de ecuaciones lineales (El Método de Kaczmarz [34] y el de Cimmino [10]), tomografías [46], probabilidades y estadísticas [50], restauración de imágenes [29], etc.

2.1. Interpretación geométrica

La siguiente figura interpreta geoméricamente el método de proyecciones alternantes en el caso de dos subespacios:

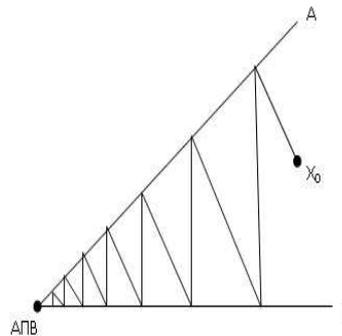


Figura 2.1: El Método de Von Neumann

El método busca la mejor aproximación de x_0 a $A \cap B$, proyectando primero a x_0 sobre A , el elemento resultante es luego proyectado sobre B , si se continúa proyectando sobre A y B alternadamente; la secuencia de elementos generados converge a $P_{A \cap B} x_0$. La utilidad práctica del MAP parte del hecho de que a menudo es más fácil calcular la proyección sobre A y B por separado que calcular la proyección sobre $A \cap B$.

2.2. Una formulación equivalente

Si se reemplaza a A por A^\perp y a B por B^\perp en la fórmula (2.1) utilizando el hecho de que $P_{A^\perp} = I - P_A$, $P_{B^\perp} = I - P_B$ y $A^\perp \cap B^\perp = (\overline{A+B})^\perp$, se obtiene un resultado equivalente al teorema de Von Neumann.

Teorema 9 Para cada $x \in H$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(I - P_B)(I - P_A)]^n x = (I - P_{\overline{A+B}})x.$$

Una extensión de este teorema para más de dos subespacios sería la siguiente.

Teorema 10 Para cada $x \in H$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(I - P_{A_k})(I - P_{A_{k-1}}) \cdots (I - P_{A_1})]^n x = (I - P_{\overline{A_1 + \cdots + A_k}})x.$$

2.3. El ángulo entre subespacios de un espacio de Hilbert

Para analizar la velocidad de convergencia del método de proyecciones alternantes, hay que tener en cuenta la noción de ángulo entre subespacios. Además, la noción de ángulo entre subespacios permite dar una interpretación geométrica a un resultado analítico. En la literatura, existen dos definiciones diferentes de ángulo entre subespacios. Ambas definiciones coinciden solamente cuando la intersección entre los subespacios es vacía.

A menos que se indique lo contrario el producto interno y norma definidos en H , están denotados por $\langle x, y \rangle$ y $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, respectivamente. Por otro lado, M y N siempre denotarán subespacios cerrados de H .

Definición 7 (Friedricks) El ángulo entre M y N es el ángulo $\alpha(M, N)$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno esta definido como

$$c(M, N) = \sup\{|\langle x, y \rangle| \mid x \in M \cap (M \cap N)^\perp, \|x\| \leq 1, y \in N \cap (M \cap N)^\perp, \|y\| \leq 1\}.$$

Definición 8 (Dixmier) El mínimo ángulo entre M y N es el ángulo $\alpha_0(M, N)$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno esta definido por

$$c_0(M, N) = \sup\{|\langle x, y \rangle| \mid x \in M, \|x\| \leq 1, y \in N, \|y\| \leq 1\}.$$

A continuación, daremos algunos lemas y teoremas que presentan propiedades derivadas de las definiciones anteriores de ángulo entre subespacios, sus demostraciones se pueden encontrar en [18].

Lema 6 1. $0 \leq c(M, N) \leq c_0(M, N) \leq 1$.

2. (Simetría)

a) $c(M, N) = c(N, M)$.

b) $c_0(M, N) = c_0(N, M)$.

3. $c(M, N) = c_0(M \cap (M \cap N)^\perp, N \cap (M \cap N)^\perp)$

4. Si $M \cap N = \{0\}$, entonces $c(M, N) = c_0(M, N)$ y $\alpha(M, N) = \alpha_0(M, N)$.

5. Si $M \cap N \neq \{0\}$, entonces $c_0(M, N) = 1$ y $\alpha_0(M, N) = 0$.

Lema 7 (Lorch [34])

1. $\alpha(M, N) > 0$ si y solo si $M + N$ es cerrado.

2. $\alpha(M^\perp, N^\perp) = \alpha(M, N)$

Lema 8 1. $c(M, N) = c_0(M, N \cap (M \cap N)^\perp) = c_0(M \cap (M \cap N)^\perp, N)$.

2. a) $|\langle x, y \rangle| \leq c_0(M, N) \|x\| \|y\|$ para todo $x \in M, y \in N$

b) $|\langle x, y \rangle| \leq c(M, N) \|x\| \|y\|$ para todo $x \in M, y \in N$, y al menos unos de los x o y esta en $(M \cap N)^\perp$.

3. $c_0(M, N) = \|P_M P_N\| = \|P_M P_N P_M\|^{1/2}$.

4. $c(M, N) = \|P_M P_N - P_{M \cap N}\| = \|P_M P_N P_{(M \cap N)^\perp}\| = \|P_M P_{(M \cap N)^\perp} P_N P_{(M \cap N)^\perp}\|$.

5. $c_0 = 0$ si y solo si $M \perp N$ (i.e., $M \subset N^\perp$)

6. $c(M, N) = 0$ si y solo si P_M y P_N conmutan.

Demostración. Para abreviar $B(H) = \{x \in H \mid \|x\| \leq 1\}$

1.

$$\begin{aligned}
 c(M, N) &= c_0(M \cap (M \cap N)^\perp, N \cap (M \cap N)^\perp) \\
 &= \sup\{|\langle x, y \rangle| \mid x \in M \cap (M \cap N)^\perp \cap B(H), y \in N \cap (M \cap N)^\perp \cap B(H)\} \\
 &= \sup\{|\langle P_{M \cap (M \cap N)^\perp} x, P_{N \cap (M \cap N)^\perp} y \rangle| \mid x, y \in B(H)\} \\
 &= \sup\{|\langle P_{(M \cap N)^\perp} P_M x, P_{(M \cap N)^\perp} P_N y \rangle| \mid x, y \in B(H)\} \\
 &\quad (\text{por lemas 3 y 5}) \\
 &= \sup\{|\langle P_M x, P_{(M \cap N)^\perp} P_N y \rangle| \mid x, y \in B(H)\} \\
 &\quad (\text{ya que } P \text{ es idempotente y autoadjunta}) \\
 &= \sup\{|\langle P_M x, P_{N \cap (M \cap N)^\perp} y \rangle| \mid x, y \in B(H)\} \\
 &\quad (\text{por lemas 3 y 5}) \\
 &= \sup\{|\langle x, y \rangle| \mid x \in M \cap B(H), y \in N \cap (M \cap N)^\perp \cap B(H)\} \\
 &= c_0(M, N \cap (M \cap N)^\perp).
 \end{aligned}$$

Por simetría se obtiene que

$$c(M, N) = c_0(M \cap (M \cap N)^\perp, N).$$

2. (2.a) Es una consecuencia de la definición de $c_0(M, N)$, mientras que para (2.b) se usa (1) y (2.a).
3. Tenemos

$$\begin{aligned} c_0(M, N) &= \sup\{|\langle x, y \rangle| \mid x \in M \cap B(H), y \in N \cap B(H)\} \\ &= \sup\{|\langle P_M x, P_N y \rangle| \mid x, y \in B(H)\} \\ &= \sup\{|\langle x, P_M P_N y \rangle| \mid x, y \in B(H)\} \\ &= \|P_M P_N\| \end{aligned}$$

Lo que prueba la primera igualdad en (3), para la segunda igualdad se utiliza el hecho de que $\|P^* P\| = \|P\|^2$, de esta manera tomando $P = P_N P_M$ se observa que

$$P^* P = P_M P_N P_N P_M = P_M P_N P_M$$

por lo tanto

$$c_0(M, N) = \|P\| = \|P^* P\|^{1/2} = \|P_M P_N P_M\|^{1/2}.$$

4. Usando (3)

$$\begin{aligned} c(M, N) &= \|P_{M \cap (M \cap N)^\perp} P_{N \cap (M \cap N)^\perp}\| \\ &= \|P_M P_{(M \cap N)^\perp} P_N P_{(M \cap N)^\perp}\| \\ &= \|P_M P_N P_{(M \cap N)^\perp}\| \\ &= \|P_M P_N (I - P_{M \cap N})\| = \|P_M P_N - P_M P_N P_{M \cap N}\| \\ &= \|P_M P_N - P_{M \cap N}\| \end{aligned}$$

5. Usando (3), $c_0(M, N) = 0$ si y solo si $P_M P_N = 0$, el resultado sigue del lema (2).
6. Usando (4), $c(M, N) = 0$ si y solo si $P_M P_N - P_{M \cap N} = 0$, el resultado sigue del lema (1).

Lema 9 Si $M + N$ es cerrado, entonces

$$(M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp.$$

En particular $M^\perp + N^\perp$ es cerrado.

Como consecuencia $M + N$ es cerrado si y solo si $M^\perp + N^\perp$ es cerrado.

Teorema 11 Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $c_0(M, N) < 1$;

2. $M \cap N = \{0\}$ y $M + N$ es cerrado;
3. existe una constante $\rho > 0$ tal que

$$\|x + y\| \geq \rho\|y\|$$

para todo $y \in N$ y $x \in M$;

4. $\inf \{ d(y, M) / y \in N, \|y\| = 1 \} > 0$;
5. $\inf \{ d(x, M) / x \in M, \|x\| = 1 \} > 0$.

Teorema 12 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $c(M, N) < 1$;
2. $M \cap (M \cap N)^\perp + N \cap (M \cap N)^\perp$ es cerrado;
3. $M + N$ es cerrado
4. $M^\perp + N^\perp$ es cerrado.

Lema 10 *Si $c_0(M, N) < 1$ entonces para cualquier subespacio cerrado X que contiene a $M + N$ se tiene que*

$$c_0(M, N) \leq c_0(M^\perp \cap X, N^\perp \cap X).$$

Teorema 13 *Si $H = M \oplus N$, entonces*

$$c_0(M, N) = c_0(M^\perp, N^\perp).$$

Teorema 14

$$c(M, N) = c(M^\perp, N^\perp).$$

2.4. Velocidad de Convergencia

En esta sección daremos algunos resultados que establecen la velocidad de convergencia del método de proyecciones alternantes. La velocidad de convergencia se establece en función de las definiciones de ángulo entre subespacios vistas anteriormente. Antes de mostrar dichos resultados daremos un lema establecido por Kayalar, Weinert y Deutsch [35] de importancia para los resultados posteriores.

Lema 11 *(Kayalar, Weinert y Deutsch) Se puede verificar que:*

1. $c(M, N) = c_0(M, N \cap (M \cap N)^\perp) = c_0(M \cap (M \cap N)^\perp, N)$.
2. $c(M, N) = \|P_M P_N\|$.
3. $c_0(M, N) = \|P_M P_N - P_{M \cap N}\| = \|P_M P_N P_{(M \cap N)^\perp}\|$.

Ahora bien, de acuerdo con el resultado (2.1) $(P_r \cdots P_2 P_1)^n x$ converge a $P_M x$ para todo $x \in H$ (donde $M = \bigcap_{i=1}^r M_i$ y $P_i = P_{M_i}$).

Podemos notar que para cada $i = 1, \dots, r$ en $P_i P_M = P_M$, y también

$$\begin{aligned} P_i P_{M^\perp} &= P_i(I - P_M) \\ &= P_i - P_i P_M \\ &= P_i - P_M P_i \\ &= (I - P_M)P_i \\ &= P_{M^\perp} P_i. \end{aligned}$$

Entonces se puede deducir que para cada $x \in H$

$$\begin{aligned} \|(P_r \cdots P_2 P_1)^n x - P_M x\| &\leq \|(P_r \cdots P_2 P_1)^n - P_M\| \|x\| \\ &= \|(P_r \cdots P_2 P_1 P_{M^\perp})^n\| \|x\| \\ &\leq \|(P_r \cdots P_2 P_1 P_{M^\perp})\|^n \|x\|. \end{aligned}$$

Luego la velocidad de convergencia del algoritmo MAP está determinado por la norma del operador $(P_r \cdots P_2 P_1 P_{M^\perp})$. En particular para $r = 2$ y a partir del lema (11) se deduce que:

$$\|(P_2 P_1)^n - P_M\| \leq \|P_2 P_1 P_{M^\perp}\| = c(M_1, M_2)^n.$$

sin embargo, en el caso de dos subespacios, esta no es la mejor cota. Aronszajn dio la siguiente: Para todo $x \in H$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\|(P_2 P_1)^n x - P_M x\| \leq c(M_1, M_2)^{2n-1} \|x\|.$$

Teorema 15 (Aronszajn [1]) Para cada $x \in H$, y para cualquier entero $n \geq 1$,

$$\|(P_N P_M)^n x - P_{M \cap N} x\| \leq c^{2n-1} \|x\|,$$

donde $c = c(M, N)$.

En el caso para más de dos subespacios se tiene el siguiente teorema:

Teorema 16 (Smith, Solmon, Wagner [46]) Para cada $x \in H$ y $n \geq 1$,

$$\|(P_{M_k} P_{M_{k-1}} \cdots P_{M_1})^n x - P_{\bigcap_1^k M_i} x\| \leq c^n \|x\|,$$

donde

$$C = [1 - \prod_1^{k-1} \text{sen}^2 \theta_i]^{1/2}$$

donde θ_i es el ángulo entre los subespacios M_i y $\bigcap_{j=i+1}^k M_j$.

2.5. Aceleración del MAP

El método de proyecciones alternadas (MAP) posee una velocidad de convergencia r-lineal. En los casos en que el ángulo entre los subespacios involucrados es pequeño, el método de proyecciones alternantes puede tener convergencia lenta. Existen muchas maneras de acelerar la convergencia. En esta sección se estudiará un esquema basado en las ideas de De Pierro e Iusem [39], Dos Santos [48], Gearhart y Koshy [25].

Se pueden encontrar otros esquemas de aceleración en los trabajos de: J. M. Martínez [37], García-Palomares y González-Castano [24]. Se denota por Q la composición de operadores de proyección, i.e. $Q = P_r P_{r-1} \cdots P_1$. Por otra parte denotamos como x el punto inicial y por M la intersección de los subespacios M_i .

Se define

$$c = \sup\{\|Qz\| : z \in M^\perp, \|z\| = 1\}.$$

En consecuencia de los resultados de la sección anterior se tiene que $c < 1$.

Para describir el método de aceleración, sea x_k la k -ésima iteración y sea Qx_k la siguiente iteración; la idea es buscar en la dirección definida por x_k y Qx_k , el punto más cercano a la solución $P_M x$.

Los puntos se representan en esta dirección:

$$x_t^k = tQx_k + (1-t)x_k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si se denota t_k el valor de t para aquel punto que se encuentra más cerca de $P_M x$, $x_{t_k}^k - P_M x$ debe ser ortogonal a $x_k - Qx_k$. Lo que quiere decir,

$$\langle x_{t_k}^k - P_M x, x_k - Qx_k \rangle = 0 \quad (2.1)$$

Como las proyecciones P_i son autoadjuntas entonces,

$$\langle P_M x, Qx_k \rangle = \langle P_1 P_2 \cdots P_r P_M x, x_k \rangle = \langle P_M x, x_k \rangle.$$

En consecuencia $\langle P_M x, x_k - Qx_k \rangle = 0$ y de (2.1) se obtiene $\langle x_{t_k}^k, x_k - Qx_k \rangle = 0$. De aquí podemos deducir

$$t_k = \frac{\langle x_k, x_k - Qx_k \rangle}{\|x_k - Qx_k\|^2}.$$

Un MAP acelerado está definido por:

Algorithm 2: Algoritmo MAP Acelerado

Data: Seleccionar $x_0 \in H$

for $k = 0, 1, \dots$, **do**

$$\left[\begin{array}{l} t_k = \frac{\langle x_k, x_k - Qx_k \rangle}{\|x_k - Qx_k\|^2} \\ x_{k+1} = t_k Qx_k + (1-t_k)x_k \end{array} \right.$$

2.6. El Método de Kaczmarz

El Teorema de Halperin (8), se mantiene con más generalidad cuando los M_i son variedades lineales cerradas (subespacios trasladados) con $\bigcap_1^k M_i \neq \emptyset$. De esta observación se deduce el método iterativo de Kaczmarz para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Considere el sistema de ecuaciones

$$\langle a_i, x \rangle = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

donde

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

y $b_i \in \mathbb{R}$. Sea

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \langle a_i, x \rangle = b_i\}$$

($i = 1, 2, \dots, k$), asumiendo que el sistema es consistente, es decir, $\bigcap_1^k H_i \neq \emptyset$.

Buscar una solución es equivalente a encontrar un punto en $\bigcap_1^k H_i$. Para encontrar dicho punto se fija un $x_0 \in \mathbb{R}^m$ arbitrario e inductivamente se define

$$x_n = (P_{H_k} P_{H_{k-1}} \cdots P_{H_1}) x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Luego el MAP implica que

$$x_n \rightarrow P_{\bigcap_1^k H_i} x_0 = y_0.$$

Esto es que y_0 satisface el sistema de ecuaciones, es decir, es solución. En particular, tomando $x_0 = 0$, se obtiene que y_0 es la solución con la mínima norma.

Este método iterativo para buscar soluciones de sistemas de ecuaciones lineales es llamado Método de Kaczmarz pues fue estudiado por primera vez por Kaczmarz en (1937).

2.7. El Método de Cimmino

El matemático Gianfranco Cimmino [10] realizó un método iterativo similar al MAP, pues encuentra el punto de intersección de n subespacios proyectando simultáneamente sobre cada uno de ellos.

A continuación, un resumen de este método obtenido del survey de M. Benzi [4].

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales donde A es una matriz real de orden $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$, inicialmente se asume que el sistema es no-singular. Si $a_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ denota la i -ésima fila de A , la solución $x_* = A^{-1}b$ es el único punto de intersección de los n hiperplanos descritos por

$$\langle a_i, x \rangle = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dado una aproximación inicial, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ Cimmino toma para cada $i = 1, 2, \dots, n$, la reflexión de $x_i^{(0)}$ de $x^{(0)}$ con respecto al hiperplano $\langle a_i, x \rangle = b_i$

$$x_i^{(0)} = x^{(0)} + 2 \frac{b_i - \langle a_i, x^{(0)} \rangle}{\|a_i\|^2} a_i \quad (2.1)$$

Cimmino nota que el punto inicial $x^{(0)}$ y su reflexión sobre los n hiperplanos están en una hiperesfera cuyo centro es la intersección de los n hiperplanos, es decir, la solución del sistema. El método es el siguiente; en los vectores de posición de cada reflexión de $x^{(0)}$ denotados por $x_i^{(0)}$ para $i = 1, \dots, n$, se sitúan n cantidades arbitrarias m_1, m_2, \dots, m_n ; posteriormente se calcula el centro de gravedad del sistema de masas $\{m_i\}_{i=1}^n$, que debe necesariamente caer dentro de la hiper-esfera y se nombra como el iterado $x^{(1)}$; el cual es una mejor aproximación que $x^{(0)}$:

$$\|x^{(1)} - x_*\| < \|x^{(0)} - x_*\|.$$

En este punto el procedimiento es repetir comenzando desde la nueva aproximación $x^{(1)}$, haciendo de esta manera una secuencia $\{x^{(k)}\}$ que converge a $x_* = A^{-1}b$ cuando $k \rightarrow \infty$.

En la forma matricial, el método de Cimmino puede ser escrito como sigue:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{2}{\mu} A^T D^T D (b - Ax^{(k)})$$

($k = 0, 1, \dots$), donde D es como sigue:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m_1}}{\|a_1\|} & & & \\ & \frac{\sqrt{m_2}}{\|a_2\|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\sqrt{m_n}}{\|a_n\|} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

y $\mu = \sum_{i=1}^n m_i$. En particular, tomando $m_i = \|a_i\|^2$ obtenemos

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{2}{\mu} A^T (b - Ax^{(k)}),$$

Cuando el sistema es inconsistente, los iterados generados por el método de Cimmino convergen a la solución de mínimos cuadrados, es decir cuando $\|b - Ax\|_2 = \min$.

El método de Cimmino [10] y el de Kaczmarz [34] están muy relacionados. El algoritmo de Cimmino es más eficaz si se adapta en computadoras paralelas, mientras el método de Kaczmarz tiende a converger de manera más rápida. Por supuesto se pueden combinar ambas ideas para obtener híbridos. Por ejemplo, las reflexiones que originalmente están en el método de Cimmino son a menudo reemplazadas por proyecciones ortogonales sobre los hiperplanos, siendo esto solo una pequeña modificación.

El método de Cimmino puede extenderse al caso de encontrar un punto en la intersección de subespacios. En este caso el método toma la forma siguiente:

Sean M_i con $i = 1, \dots, n$ subespacios de un espacio de Hilbert H . Sea P_{M_i} el operador proyección ortogonal sobre M_i , luego

$$x_{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{M_i} x_k.$$

Es decir, el iterado x_{k+1} es un promedio de las proyecciones entre los subespacios M_i del iterado anterior, en este caso de x_k .

Un ejemplo de este método para el caso de dos subespacios se puede apreciar en la siguiente figura.

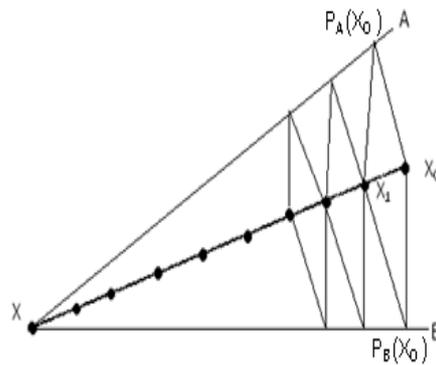


Figura 2.2: El Método de Cimmino con Proyecciones

Actualmente el método de Cimmino encuentra aplicaciones principalmente en las siguientes áreas:

- Programación en matemática convexa, especialmente problemas de viabilidad de convexos (el problema de determinar si una familia de convexos tiene intersección no vacía, y si es así encontrar un punto de dicha intersección);

- Adaptación a la terapia de radiación;
- Solución de problemas de inversa en la astronomía, física médica y geofísica;
- Reconstrucción de imágenes mediante proyecciones;
- Formación de redes neurales;
- Solución de grandes sistemas lineales mediante la discretización de ecuaciones integrales Fredholm de primera clase.

Véase el survey de M. Benzi [4] para obtener referencias acerca de cada una de estas y otras aplicaciones del método de Cimmino.

Capítulo 3

METODOS DE OPTIMIZACION

En este capítulo, se muestran distintos métodos iterativos de optimización para funciones cuadráticas, tomando como base el libro de M. Raydan [43] y el de Y. Saad [45]. En general, las demostraciones de los lemas y teoremas mostrados a lo largo del capítulo se encuentran en [43].

Definición 9 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada. Un vector distinto de cero $x \in \mathbb{R}^n$ es un autovector de A , y $\lambda \in \mathbb{C}$ su autovalor asociado, si

$$Ax = \lambda x.$$

Definición 10 El conjunto de los autovalores de A se conoce como el **espectro** de A y es un subconjunto del campo complejo \mathbb{C}

3.1. Matrices simétricas y positivo definidas

Las matrices simétricas son sumamente importantes en optimización, estas satisfacen que $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i \neq j$, o de otra manera aquellas para las cuales la i -ésima fila es igual a la i -ésima columna, lo que a su vez permite describirlas de manera compacta como $A^T = A$. Para este tipo de matrices los autovalores son números reales y los autovectores se pueden escoger de forma ortogonal.

Si además de ser simétrica, la matriz A posee la propiedad de que $x^T Ax > 0$ para todo vector $x \neq 0$, entonces se dice que A es **positivo definida**. Se dice que A es **positivo semidefinida** si $x^T Ax \geq 0$ para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$. Decimos que A es **negativo definida** o negativo semidefinida si $-A$ es positivo definida o positivo semidefinida, respectivamente. Decimos que A es **indefinida** si no es ni positivo semidefinida ni negativo semidefinida.

3.2. Funciones cuadráticas

Una función cuadrática es un polinomio en n variables con términos hasta de segundo orden. Por ejemplo,

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 5x_2x_3 + x_1 - x_3 - 4 \quad (3.1)$$

es una función cuadrática en tres variables. Funciones de este tipo aparecen con mucha frecuencia en el área de optimización numérica y en otras áreas de interés en análisis numérico. Un caso importante es el ajuste de datos mediante el método de mínimos cuadrados lineales. En este caso, el problema se reduce a la minimización de una cuadrática sin restricciones. En general la minimización de cuadráticas sin restricciones es equivalente a la solución de sistemas de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es simétrica, el cual es un problema de fundamental importancia en algebra lineal numérica. La minimización de cuadráticas sin restricciones es también usada comunmente como subproblema auxiliar en métodos de optimización que pretenden resolver problemas mucho mas complicados.

Toda función cuadrática puede ser escrita de la siguiente manera

$$q(x) = \frac{1}{2}x^tAx - b^tx + c \quad (3.2)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, los vectores $x, b \in \mathbb{R}^n$ y la constante $c \in \mathbb{R}$. Para el ejemplo (3.1) se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } c = -4.$$

Con la representación dada por (3.2) es fácil establecer que el gradiente de q es una función vectorial lineal y que el Hessiano de q es una matriz constante.

Los siguientes lemas y teoremas sirven como preliminares de funciones cuadráticas y condiciones de optimalidad, respectivamente y se encuentran en [43], por ende se obviarán sus demostraciones.

Lema 12 Si $q(x) = \frac{1}{2}x^tAx - b^tx + c$, donde $A^T = A$, entonces $\nabla q(x) = Ax - b$ y la matriz $\nabla^2 q(x) = A$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 17 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, con D abierto y convexo, y x_* es un mínimo local de f , entonces $\nabla f(x_*) = 0$.

Teorema 18 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, con D abierto y convexo, y x_* es un mínimo local de f , entonces $\nabla f(x_*) = 0$ y $\nabla^2 f(x_*)$ es positivo semidefinida.

Teorema 19 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, con D abierto y convexo, y si $\nabla f(x_*) = 0$ y $\nabla^2 f(x_*)$ es positivo definida, entonces x_* es un mínimo local estricto de f

Usando las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden y el Lema (12), podemos observar que los puntos estacionarios o críticos de (3.2) son las soluciones del sistema lineal

$$Ax = b.$$

El próximo lema establece las condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de dichos puntos estacionarios.

Lema 13 *El problema de minimizar (3.2), sin restricciones, admite algún punto estacionario si, y solamente si, $b \in R(A)$, donde $R(A)$ es el espacio columna de A . Y admite un único punto estacionario si, y solamente si, A es no singular.*

El sistema $Ax = b$ puede tener una, ninguna o infinitas soluciones. Si b no pertenece al espacio columna de A entonces (3.2) no posee puntos estacionarios, es decir, el gradiente no se anula para ningún $x \in \mathbb{R}^n$. Este es el caso, por ejemplo, cuando q es una función lineal no constante ($A = 0$ y $b \neq 0$). Si A es no singular, entonces (3.2) posee un único punto estacionario, el cual puede ser un maximizador, un minimizador o un punto de ensilladura. Finalmente, si $Ax = b$ posee infinitas soluciones, entonces (3.2) tiene infinitos puntos estacionarios todos del mismo tipo.

Lema 14 *Si A es semipositivo definida y x_* es un punto estacionario de (3.2), entonces x_* es un minimizador global de (3.2).*

Toda cuadrática posee un único tipo de puntos estacionarios: minimizadores globales, maximizadores globales o puntos de ensilladura que no son ni maximizadores ni minimizadores locales.

3.3. Métodos clásicos para cuadráticas

Definición 11 *Dada una función continuamente diferenciable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que una dirección $d \in \mathbb{R}^n$ es de descenso a partir de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si*

$$\nabla f(x)^t d < 0.$$

Si $\nabla f(x) \neq 0$ entonces x no es un minimizador y por ende en cualquier vecindario alrededor de x existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(z) < f(x)$.

Lema 15 *Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x) \neq 0$, y $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x)^t d < 0$. Entonces existe $\beta > 0$ tal que $f(x + \alpha d) < f(x)$ para todo $\alpha \in (0, \beta]$.*

Inspirados en el Lema (15), se puede definir una familia muy amplia de métodos iterativos para encontrar puntos mínimos, cuya iteración $k + 1$ viene dada por

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k,$$

donde d_k es una dirección de descenso y λ_k es una longitud de paso que garantiza cierto tipo de descenso en la función objetivo. Diferentes formas de escoger d_k y diferentes políticas de

descenso en f producen diferentes métodos.

El conjunto de direcciones de descenso a partir de un punto x es siempre no vacío, ya que al menos podemos definir la dirección $d = -\nabla f(x)$. Mas aún, esta dirección conocida como la dirección de gradiente negativo, es la que garantiza mas rápido descenso local de la función f . En efecto, $d = -\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ resuelve el problema de optimización: minimizar $\nabla f(x)^t d$ sujeto a que $d \in \mathbb{R}^n$ y $\|d\|_2^2 = 1$.

3.3.1. Método de Cauchy

La dirección del gradiente negativo es fundamental en optimización y fue la dirección usada por Cauchy, en lo que pareciera ser el primer método computacional propuesto en el caso multivariable. Para ser precisos, el método propuesto por Cauchy también conocido como mínimo descenso, por la propiedad optimal anterior, se puede escribir de la siguiente manera:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k),$$

donde

$$\lambda_k = \operatorname{argmin}_{\lambda > 0} f(x_k - \lambda \nabla f(x_k)).$$

Algorithm 3: Método del Gradiente o de Cauchy

Data: Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$

for $k = 0, 1, \dots$ **do**

1. escoger la longitud del paso $\frac{1}{\alpha_k}$
 2. $s_k = -\frac{1}{\alpha_k} g_k$
 3. $x_{k+1} = x_k + s_k$
-

La convergencia del método de Cauchy esta garantizada cuando A es simétrica positivo definida; el resultado es consecuencia del siguiente lema conocido como Desigualdad de Kantorovich.

Lema 16 *Sea B una matriz simétrica positivo definida de números reales, con λ_{max} y λ_{min} siendo el más grande y el más pequeño autovalor. Entonces*

$$\frac{\langle Bx, x \rangle \langle B^{-1}x, x \rangle}{\langle x, x \rangle^2} \leq \frac{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}{4\lambda_{max}\lambda_{min}}, \quad \forall x \neq 0$$

La Desigualdad de Kantorovich ayuda a establecer la rata de convergencia de este método mediante el siguiente teorema:

Teorema 20 *Sea A una matriz simétrica positivo definida, entonces la A -norma del vector error $e_k = x_* - x_k$ generado por el algoritmo de Cauchy satisface la siguiente condición:*

$$\|e_{k+1}\|_A \leq \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \|e_k\|_A,$$

Además, el algoritmo converge para cualquier x_0 .

3.3.2. Método de Newton

En este método d_k se obtiene resolviendo el sistema

$$\nabla^2 f(x_k) d_k = -\nabla f(x_k),$$

donde $\nabla^2 f(x)$ representa la matriz Hessiana de f en x . Por supuesto para que el método de Newton esté bien definido, se debe suponer que f es dos veces continuamente diferenciable en la región de interés. Por otro lado, para asegurar que la dirección d_k de Newton es de descenso, es suficiente suponer que la Hessiana en x_k es simétrica positivo definida. En efecto, en ese caso la Hessiana es invertible y su inversa es también positivo definida, y se cumple que

$$\nabla f(x_k)^t d_k = -\nabla f(x_k)^t \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k) < 0.$$

Si el método de Newton se aplica al problema de minimizar una cuadrática estrictamente convexa dada por (3.2), claramente se obtiene la solución exacta en la primera iteración; lo que no es igual para el método de mínimo descenso pues es un método extremadamente lento.

3.4. Método del Gradiente Espectral

El método clásico del gradiente, también conocido como el método del mínimo descenso o el método de Cauchy, es un método famoso por su forma lenta de converger y por verse seriamente afectado frente a problemas de mal condicionamiento. Este comportamiento negativo del método clásico del gradiente es la razón principal por la cual la dirección del gradiente negativo se ha considerado una mala dirección para la búsqueda de mínimos locales. Sin embargo, en 1988, Barzilai y Borwein [3] presentaron una nueva manera de escoger la longitud del paso en el método del gradiente que requiere menos trabajo computacional y acelera notablemente su velocidad de convergencia. Más interesante aún, desde un punto de vista teórico, esta manera de escoger la longitud del paso no garantiza descenso en la función objetivo, ni en la norma del gradiente. Por lo tanto, el análisis de convergencia no podrá estar basado en el tradicional enfoque del mapa contractil, comúnmente usado en el análisis de los métodos de optimización numérica. En particular, Barzilai y Borwein, usando teoría de números, pudieron establecer convergencia únicamente en el caso cuadrático y solo cuando $n = 2$.

Lamentablemente, el tipo de análisis que ellos presentaron no puede ser extendido al caso $n > 2$. El análisis de convergencia para el caso general ($n > 2$) se encuentra en [44], en donde se presenta una conexión entre el método del gradiente espectral y el método de las potencias con desplazamiento para el cálculo de autovalores y autovectores de matrices simétricas.

3.4.1. El Método del Gradiente Espectral

Se considera el siguiente problema asociado:

$$\text{encontrar } x_* \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \nabla f(x_*) = 0, \quad (3.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función diferenciable a la cual se le desea encontrar mínimos locales. La solución numérica del sistema de ecuaciones no lineales (3.1) es obtenida, generalmente, mediante un esquema iterativo, moviéndose en cada iteración de un estimado x_k de x_* a un mejor estimado x_{k+1} . En muchos algoritmos, cada iteración envuelve el cálculo de un paso Casi-Newton, $s_{CN} = -A_k^{-1} \nabla f(x_k)$, donde $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una aproximación del Hessiano de f en x_k . Al finalizar cada iteración, A_k se actualiza y se obtiene A_{k+1} , una aproximación del Hessiano de f en x_{k+1} . Esta aproximación, usualmente, se escoge de forma tal que satisfaga la ecuación de la secante,

$$A_{k+1} s_k = y_k \quad (3.2)$$

donde, $s_k = x_{k+1} - x_k$ y $y_k = g_{k+1} - g_k$, donde $g_k = \nabla f(x_k)$.

En el caso unidimensional, la ecuación de la secante define completamente el valor de A_{k+1} ; sin embargo, si $n > 1$, muchas matrices satisfacen la ecuación de la secante. Por lo tanto, además de satisfacer (3.2), la matriz A_{k+1} debe restringirse a un conjunto de matrices que posean propiedades simétricas, positivo definidas, etc. La propiedad fundamental que caracteriza a los métodos espectrales esta basada en que el escalar $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ que resuelve de forma única el sistema lineal sobredeterminado $y_k = \alpha_{k+1} s_k$, en el sentido de los mínimos cuadrados, está dado por

$$\alpha_{k+1} = \frac{s_k^t y_k}{s_k^t s_k}. \quad (3.3)$$

Si $s_k \neq 0$. Es decir, restringiendo la matriz A_{k+1} a la familia de múltiplos escalares de la identidad y exigiendo que la ecuación de la secante se satisfaga en el sentido de los mínimos cuadrados, se obtiene el siguiente algoritmo:

Algorithm 4: Gradiente Espectral

Data: Dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha_0 \in \mathbb{R}$

for $k = 0, 1, \dots$ **do**

1. $s_k = -\frac{1}{\alpha_k} g_k$
 2. $x_{k+1} = x_k + s_k$
 3. $y_k = g_{k+1} - g_k$
 4. $\alpha_{k+1} = \frac{s_k^t y_k}{s_k^t s_k}$
-

Observaciones:

- En cada iteración solo se requiere calcular dos productos internos, dos suma de vectores, la multiplicación de un vector por un escalar y la evaluación del vector gradiente.
- Es un método tipo gradiente que usa información apropiada de los dos iterados anteriores, a diferencia del método de Cauchy que solo usa el iterado anterior.
- Satisface la ecuación débil de la secante

$$s_k^t A_{k+1} s_k = s_k^t y_k$$

- El inverso de la longitud de paso, α_{k+1} , es un cociente de Rayleigh para la matriz Hessiana promedio

$$\int_0^1 \nabla^2 f(x_k + t s_k) dt.$$

3.4.2. Gradiente Espectral caso cuadrático

Si consideramos el problema (3.1) cuando $q(x) = \frac{1}{2}x^t A x - b^t x + c$ es una función cuadrática y A es una matriz simétrica y positivo definida, entonces α_{k+1} en (5.1) se escribe como

$$\alpha_{k+1} = \frac{s_k^t A s_k}{s_k^t s_k} = \frac{g_k^t A g_k}{g_k^t g_k}. \quad (3.4)$$

En este caso, α_{k+1} resulta ser el cociente de Rayleigh de A evaluado en g_k . Como A es positivo definida;

$$0 < \lambda_{min} \leq \alpha_k \leq \lambda_{max} \text{ para todo } k,$$

donde λ_{min} y λ_{max} son el menor y mayor autovalor de A , respectivamente.

Por lo tanto, no existe ningún peligro de dividir por cero en el paso 1 del algoritmo (4).

Es importante notar que, en el método del gradiente espectral, la dirección de búsqueda en cada iteración es siempre el gradiente negativo de q en x_k , tal como sucede en el método de mínimo descenso. Sin embargo, la manera de escoger la longitud del paso es diferente. En efecto, en el caso cuadrático, el algoritmo (4) se transformará en el método clásico del gradiente (método de Cauchy) si en lugar de escoger α_{k+1} como en (3.4), lo escogiésemos como

$$\alpha_{k+1} = \frac{g_{k+1}^t A g_{k+1}}{g_{k+1}^t g_{k+1}}.$$

A pesar de la evidente semejanza entre estos dos algoritmos, el método del gradiente espectral es mucho mas rápido que el método de mínimo descenso al mismo costo computacional.

3.4.3. Análisis de convergencia

Se establecerá la convergencia del método del gradiente espectral para cuadráticas estrictamente convexas.

Definición 12 Si la secuencia $\{x_k\}$ converge a x_* ; luego el vector error en la k -ésima iteración se define como $e_k = x_k - x_*$

Definición 13 Se dice que la secuencia $\{e_k\}$ converge a $\mathbf{0}$ con **q-orden p** si existe $c > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|e_{k+1}\| \leq c\|e_k\|^p, \quad \forall k \geq k_0.$$

En particular, si $p = 1$ se dice que la convergencia es *q-lineal*, con $0 < c < 1$ y si $q = 2$ entonces la convergencia es *q-cuadrática*.

Se dice también que $\{e_k\}$ converge a 0 con *q-orden p* si existe $\{b_k\}$ y $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|e_k\| \leq \|b_k\|, \quad \forall k \geq k_0 \quad \text{y } \{b_k\} \text{ converge a } 0 \text{ con q-orden } p.$$

Para cualquier error lineal e_0 existen constantes $d_1^0, d_2^0, \dots, d_n^0$ tal que

$$e_0 = \sum_{i=1}^n d_i^0 v_i,$$

donde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son los autovectores ortonormales de A asociados con los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, suponiendo lo siguiente:

$$0 < \lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}.$$

Luego el error en $k + 1$ sería

$$e_{k+1} = \sum_{i=1}^n d_i^{k+1} v_i$$

donde,

$$d_i^{k+1} = \left(\frac{\alpha_k - \lambda_i}{\alpha_k}\right) d_i^k = \prod_{j=0}^k \left(\frac{\alpha_j - \lambda_i}{\alpha_j}\right) d_i^0.$$

Las propiedades de convergencia de la sucesión $\{e_k\}$ dependerán del comportamiento de cada una de las sucesiones $\{d_i^k\}$, con $1 \leq i \leq n$. En general, estas sucesiones no tienen un comportamiento monótono. Sin embargo, el próximo lema muestra que la sucesión $\{d_1^k\}$ asociada con λ_{\min} decrecerá q-linealmente a cero.

Lema 17 la sucesión $\{d_1^k\}$ converge a cero q-linealmente a cero con factor de convergencia $\bar{c} = 1 - (\lambda_{\min}/\lambda_{\max})$.

Inductivamente, se obtiene el siguiente resultado:

Lema 18 *Si las sucesiones $\{d_1^k\}, \dots, \{d_l^k\}$ todas convergen a cero para un entero fijo l , $1 \leq l \leq n$. Entonces,*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |d_{l+1}^k| = 0.$$

Los dos lemas anteriores cuyas demostraciones se pueden obtener en [43] dan lugar al próximo y último resultado que establece la convergencia global del método del gradiente espectral cuando se aplica a una funcional cuadrática cuya matriz Hessiana es PD.

Teorema 21 *Sea $q(x)$ una función cuadrática estrictamente convexa. Sea $\{x_k\}$ la sucesión generada por el método gradiente espectral y x_* el único minimizador de q . Entonces, o bien $x_j = x_*$ para algún j finito o la sucesión $\{x_k\}$ converge a x_* .*

Antes de cerrar esta sección sería de mucho provecho mostrar el teorema que establece la velocidad de convergencia del método de gradiente espectral; que aún en el caso cuadrático, se empieza a entender muy recientemente. En particular, Barzilai y Borwein [3] establecen convergencia R-superlineal si A solo posee dos autovalores distintos. Este es un resultado atractivo, que ha sido extendido parcialmente al caso general. Por otro lado, también se establece convergencia R-lineal del método en el caso cuadrático convexo.

3.4.4. Aplicaciones y extensiones

Es útil enumerar una variedad de aplicaciones y extensiones para las cuales el método del gradiente espectral ha mostrado ser efectivo. El método se ha utilizado en el problema químico de conformación molecular, en el trazado de rayos sísmicos y en la tomografía de reflexión sísmica, en la estimación de constantes ópticas, en el problema de escalamiento multidimensional que aparece en psicometría y en estadística, y en la diferenciación automática de funciones. El método también se ha extendido al problema de minimizar funciones sobre conjuntos convexos [6] y de esa manera se ha usado para resolver problemas de obstáculos, en la ubicación óptima de poliedros en el plano, y en la reconstrucción de imágenes mediante el uso de integrales de línea. Últimamente se ha extendido al problema general de programación no-lineal mediante técnicas Lagrangeanas ([36], [15]) y a la resolución numérica de sistemas no lineales, si es requerido obtener más referencias sobre estas aplicaciones, se recomienda ver [43].

Capítulo 4

PROBLEMAS DE PUNTO DE ENSILLADURA

En este capítulo, se presentarán distintos aspectos ligados a la resolución de problemas de puntos de ensilladura. Tomando como recurso el artículo de M. Benzi, G. Golub y J. Liesen [5].

Desde hace algunos años ha existido mucho interés en la resolución numérica de grandes sistemas lineales llamados puntos de ensilladura (Saddle Point Problems). Motivado a numerosas aplicaciones, en las ramas técnicas y científicas que conducen a este tipo de problemas. Por ejemplo, para resolver los problemas de mecánica de fluido con la formulación de elementos finitos mixtos; en la formulación de descomposición de dominios y también para los algoritmos interiores de optimización lineal y no lineal. Se hará énfasis especialmente en el caso donde el sistema tiene una estructura particular por bloques:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

donde,

- B es una matriz $m \times n$, $\text{Rango}(B) = m$, con $m \leq n$.
- A es una matriz $n \times n$, simétrica semi positivo definida.

Este sistema proviene de condiciones de optimización de primer orden y de problemas de programación cuadrática:

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x) &= \frac{1}{2}x^T Ax - f^T x & (4.2) \\ \text{sujeto a } & Bx = 0 \end{aligned}$$

En este caso, la variable y de (4.1) representa el vector de multiplicadores de Lagrange. Toda solución $(x_*; y_*)$ de (4.1) es un punto de ensilladura para el lagrangeano

$$L(x, y) = \frac{1}{2}x^T Ax - f^T x + (Bx)^T y,$$

de donde proviene el nombre de problemas de puntos de ensilladura dado por (4.1). Si $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ es un punto de ensilladura, entonces verifica que

$$L(x_*, y) \leq L(x_*, y_*) \leq L(x, y_*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m,$$

o de una manera equivalente,

$$\min_x \max_y L(x, y) = L(x_*, y_*) = \max_y \min_x L(x, y).$$

4.1. Principales aplicaciones para problemas de punto de ensilladura

Los problemas de punto de ensilladura son de grandes escalas y se encuentran en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería. En la siguiente lista se pueden observar algunos de los campos en donde naturalmente aparecen:

- Dinámica de fluidos computacional.
- Limitada y ponderada estimación de los mínimos cuadrados.
- Optimización con restricciones.
- Economía.
- Circuitos y redes eléctricas.
- Electromagnetismo.
- Finanzas.
- Reconstrucción de imágenes.
- Registro de imágenes.
- Interpolación de datos esparcidos.
- Elasticidad lineal.
- Generación de mallas de gráficos por ordenador.
- Aproximación por elemento finito de ecuaciones diferenciales elípticas.
- Modelo para la reducción de los sistemas dinámicos.
- Control óptimo.
- Parámetro para problemas de identificación.

Véase [5] para obtener referencias de cada una de las aplicaciones listadas anteriormente.

4.2. Propiedades de las matrices de punto de ensilladura

En esta sección, se establecerán algunas propiedades del álgebra lineal que poseen las matrices de puntos de ensilladura

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

4.2.1. Factorización por bloques del complemento de Schur

Si la matriz A es invertible, la matriz de punto de ensilladura Λ admite la factorización triangular por bloques:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ BA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B^T \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde $S = -BA^{-1}B^T$ es el complemento de Schur de A en Λ . Numerosas propiedades importantes de la matriz de punto de ensilladura Λ son derivadas de (4.1).

También son utilizadas las siguientes factorizaciones:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B^T \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

y

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ BA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B^T \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

4.2.2. Condición para la existencia de la inversa de la matriz de punto de ensilladura

Sea A una matriz no singular. La matriz Λ es una matriz no singular si y solo si el complemento de Schur S es también no singular. Desafortunadamente, en general, no se puede decir mucho sobre la matriz del complemento de Schur $S = -BA^{-1}B^T$. Es por esto que son necesarias algunas hipótesis sobre A y B .

Básicamente se tienen dos casos:

El primero, es cuando la matriz A es simétrica positivo definida. En este caso la matriz del complemento de Schur $S = -BA^{-1}B^T$ es una matriz simétrica semi negativo definida. Luego es evidente que S y Λ son matrices invertibles si, y solo si, la matriz B es de rango completo ($Rango(B) = m$). En este caso la matriz de complemento de Schur S es simétrica semi negativo definida y los problemas de punto de ensilladura (4.1) tienen solución única x_* .

También se puede mostrar que x_* es la proyección A -ortogonal de la solución $x_c = A^{-1}f$ del problema sin restricciones (4.2), sobre el espacio de restricciones $\ker B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = 0\}$.

Donde la proyección A -ortogonal esta definida mediante el producto interno $\langle x, y \rangle_A = y^T Ax$. En el caso en que la matriz A no sea positivo definida, para que la matriz Λ sea invertible es suficiente que A sea positivo definida sobre el $\ker B$. De otra forma, si A es simétrica semi positivo definida el siguiente Teorema es útil.

Teorema 22 *Si A es simétrica semi positivo definida y B de rango completo, luego una condición suficiente y necesaria para que la matriz Λ sea no singular es que $\ker A \cap \ker B = \{0\}$.*

El segundo, es el caso no simétrico, en este es más difícil encontrar las condiciones suficientes para que Λ sea invertible, en función del kernel de A y de B . El siguiente teorema establece las condiciones suficientes para la existencia de una solución única en función de la parte simétrica de la matriz A dada por $H = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

Teorema 23 *Si la parte simétrica de A , $H = \frac{1}{2}(A + A^T)$ es semi positivo definida y B es de rango máximo. Luego,*

1. $\ker(H) \cap \ker(B) = \{0\} \Rightarrow \Lambda$ es invertible.
2. Λ es invertible $\Rightarrow \ker(A) \cap \ker(B) = \{0\}$

Las demostraciones de los teoremas 22 y 23 se encuentran en [5].

4.2.3. Inversa de una matriz de punto de ensilladura

Sea A una matriz no singular. Luego la matriz Λ es invertible si, y solo si, la matriz del complemento de Schur $S = -BA^{-1}B^T$ es también no singular. En este caso, se tiene la siguiente expresión para la inversa de Λ

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B^T S^{-1}BA^{-1} & -A^{-1}B^T S^{-1} \\ -S^{-1}BA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

La expresión para la solución del problema (4.1) (x_*, y_*) sería:

$$\begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I + A^{-1}B^T S^{-1}B)A^{-1}f \\ S^{-1}BA^{-1}f \end{pmatrix}.$$

La matriz $\Pi = A^{-1}B^T S^{-1}B$ es una matriz de proyección. En efecto,

- $\Pi^2 = \Pi$.
- $A\Pi x \in (\ker(B))^\perp$.
- $x - \Pi x \in \ker(B)$.

Luego Π representa una proyección oblicua sobre la imagen de $A^{-1}B^T$ y ortogonal al $\ker(B)^\perp$. La primera componente del vector solución x_* se puede escribir como

$$x_* = (I - \Pi)x_c$$

donde, $x_c = A^{-1}f$ es la solución del problema sin restricciones (4.2).

Como A es una matriz positivo definida, entonces la matriz $I - \Pi$ se convierte en la matriz de proyección A -ortogonal sobre $\ker(B)$, En este caso A^{-1} es también una matriz positivo definida, y la segunda componente del vector solución y_* es la solución del problema de mínimos cuadrados generalizados

$$\|f - B^T y_*\|_{A^{-1}} = \min_u \|f - B^T u\|_{A^{-1}}.$$

Es posible dar una expresión para la inversa de Λ donde la matriz A no es necesariamente invertible. Si denotamos $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal de $\ker(B)$, si la parte simétrica H de A es semi positivo definida y si se denota $Z^T A Z$, la cual es una matriz invertible, luego siendo $W = Z(Z^T A Z)^{-1} Z^T$ se puede encontrar una expresión para la inversa de Λ .

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} W & (I - WA)B^+ \\ (B^+)^T(I - WA) & -(B^+)^T(A - AWA)B^+ \end{pmatrix}.$$

Donde la matriz $B^+ = B^T(BB^T)^{-1}$ es la pseudo inversa de B .

4.3. Métodos clásicos para la resolución de problemas de punto de ensilladura

Los problemas de punto de ensilladura aparecen en todos los tamaños y con una amplia variedad de estructuras y propiedades; en particular si la matriz es grande y sparse se recomienda buscar la solución mediante métodos iterativos, directos o preferiblemente métodos de optimización.

A menudo en la práctica los problemas carecen de estructura y es por eso que muchos de los algoritmos empleados para la resolución de estos problemas, tratan de aprovechar cualquier característica para ganar eficacia. En muchos de los casos la estructura del problema sugiere usar algoritmos con alto grado de paralelismo.

La siguiente lista muestra los métodos más usuales:

- Reducción del complemento de Shur:
La aproximación de este método es atractiva en el caso de que la matriz A de Λ sea no singular y de que el sistema de ecuaciones desplegado por este procedimiento sea lineal y pequeño.

- Métodos de espacio nulo:
Estos métodos tienen la ventaja de no requerir el cálculo de A^{-1} y a menudo son aplicables cuando A es singular; su solución solo es atractiva cuando $n - m$ es un número pequeño y dependen de la nulidad de la matriz B .
- Métodos Directos:
Estos métodos se basan ocasionalmente en la factorización triangular de A ; solo sirven en el caso de que el problema de punto de ensilladura sea simétrico.
- Iteraciones estacionarias:
Los algoritmos con esquemas estacionarios se caracterizan por ser independientes y más que todo se usan como preconditionadores para los métodos del subespacio de Krylov.
- Métodos de subespacios de Krylov:
Estos se basan en obtener una base de Krylov para el subespacio generado por A y se suelen aplicar luego de preconditionar el problema.
- Métodos de multinivel:
Son utilizados para la resolución de problemas de punto de ensilladura provenientes de ecuaciones diferenciales parciales; los más comunes son el método de multigrid y el de descomposición de dominios.
- Métodos con A.O.P:
Son métodos iterativos, que utilizan proyecciones alternantes oblicuas para encontrar direcciones de descenso, por lo general, se usan para la resolución de problemas de punto de ensilladura provenientes de la discretización de problemas de descomposición de dominios; como referencia está el artículo de L.M. Hernández [30].

Capítulo 5

METODO DE CIMMINO ACELERADO PARA PROBLEMAS DE PUNTO DE ENSILLADURA

Este capítulo, se fundamenta en las notas escritas por L. M. Hernández [31]; en donde se propone resolver problemas de punto de ensilladura con una versión acelerada del método de Cimmino. El problema de punto de ensilladura es reescrito como un problema de proyecciones alternantes y resuelto con una versión espectral del método de Cimmino.

Se tiene interés en el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

donde,

(H1) $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz con $Rango(B) = m$, $m \leq n$,

(H2) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica positivo definida.

Proposición 1 *Bajo las hipótesis (H1, H2), el sistema (5.1) tiene solución única $(x, \lambda)^T$ que satisface:*

$$\begin{cases} f - Ax \perp \ker B, \\ x \in \ker B. \end{cases} \quad (5.2)$$

Demostración

Bajo las hipótesis (H1, H2) el sistema:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ 0 & BA^{-1}B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ BA^{-1}f \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

es equivalente a (5.1) y $BA^{-1}B^T$ es una matriz positivo definida consecuentemente el sistema (5.1) tiene única solución [30].

Proposición 2 *Bajo las hipótesis (H1, H2), en la solución $(x, \lambda)^T$ de (5.1), el vector x corresponde a la proyección ortogonal de $x_u = A^{-1}f$ sobre el Kernel de B , en el sentido del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.*

Demostración

De (5.1) es fácil comprobar que la solución x verifica $f - Ax = B^T \lambda \perp \ker B$.
 Sea V la variedad lineal definida por:

$$V = \{x \mid f - Ax \perp \ker B\}.$$

Tomando en cuenta las hipótesis $H1$ y $H2$, la solución $(x, \lambda)^T$ de (5.1) es tal que x es el único elemento en la intersección de V y el $\ker B$,

$$\{x\} = V \cap \ker B.$$

Sea $x_u = A^{-1}f$, el sistema (5.2) se transforma

$$\begin{cases} \forall y \in \ker B, \langle A(x_u - x), y \rangle = 0, \\ x \in \ker B. \end{cases} \tag{5.4}$$

Cuando A es una matriz simétrica positivo definida, la función $\{x, y\} \rightarrow \langle Ax, y \rangle$ es un producto escalar denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ y el sistema (5.1) es equivalente a

$$\begin{cases} x_u = A^{-1}f \\ x_u - x \perp_A \ker B \\ x \in \ker B. \end{cases} \tag{5.5}$$

Eso significa que x es la proyección ortogonal de $x_u = A^{-1}f$ sobre el Kernel de B , en el sentido del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. La notación $x_u - x \perp_A \ker B$ significa que $\langle (x_u - x), y \rangle_A = 0, \forall y \in \ker B$.

En este caso, se puede escribir la variedad lineal como $V = \{x_u\} + (\ker B)^{\perp_A}$ [30].

5.1. Resolución de problemas de punto de ensilladura por el método de Cimmino

Particionando $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en r bloques de filas:

$$B^T = [B_1^T, B_2^T, \dots, B_r^T].$$

Entonces,

$$\ker B = \bigcap_{i=1}^r \ker B_i.$$

Consecuentemente de la proposición (2), se tiene que la solución x para el problema del punto de ensilladura (5.1) es la proyección A-ortogonal de $x_u = A^{-1}f$ sobre el subespacio

$\ker B = \bigcap_{i=1}^r \ker B_i$. Así este problema se transforma en uno denominado Problema de Mejor Aproximación en el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ y puede ser resuelto por el método de Cimmino [10, 13]:

$$x_{k+1} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{M_i} x_k. \quad (5.1)$$

En esta sección, el operador P_{M_i} representa la proyección A-ortogonal sobre $M_i = \ker B_i$. Como el $\ker B_i$ es también un subespacio, entonces se puede calcular la A-proyección de un vector $y \in \mathbb{R}^n$ sobre el $\ker B_i$, mediante $P_{M_i} y$ obteniendo x de un problema de punto de ensilladura más pequeño:

$$\begin{pmatrix} A & B_i^T \\ B_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay \\ 0 \end{pmatrix},$$

Donde este puede ser resuelto mediante técnicas explicadas en [30, 5, 40].

La principal ventaja del método de Cimmino es que altamente paralelizable.

Para este problema, cada A-proyección sobre el $\ker B_i$ puede ser representada independientemente para $i = 1, \dots, r$. Sin embargo, es sabido que el método de Cimmino es lento [9]. Por esta razón, se propone utilizar versiones aceleradas de este método.

5.2. Aceleración del método de Cimmino

Sean M_i , para $i = 1, \dots, r$ subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H . Sea P_{M_i} la proyección ortogonal sobre M_i . Se considera la siguiente función a minimizar

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \|x - P_{M_i} x\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \|(I - P_{M_i})x\|^2.$$

La función f es una cuadrática positiva. Esta función es frecuentemente llamada *función de aproximación* [8]. Si existe un vector $x \in \bigcap_{i=1}^r M_i$, entonces $f(x) = 0$ y x minimiza a f . El gradiente de f es,

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^r x - P_{M_i} x$$

y la Hessiana,

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^r I - P_{M_i}.$$

Es fácil verificar que $\nabla^2 f(x)$ es semi positiva definida. De hecho,

$$\langle x, \nabla^2 f(x) \rangle = \sum_{i=1}^r \|x - P_{M_i} x\|^2 \geq 0.$$

adicionalmente $\langle x, \nabla^2 f(x) \rangle = 0$ si y solo si $x \in \bigcap_{i=1}^r M_i$.

Tomando esto en cuenta, se pueden plantear métodos iterativos para resolver el problema de minimización

$$\min f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \|x - P_{M_i} x\|^2.$$

Las soluciones de este problema son los $x \in \cap_{i=1}^r M_i$. La construcción para el método de mínimo descenso o del gradiente sería:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \quad (5.1)$$

que para la función dada corresponde a la iteración

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \sum_{i=1}^r x_k - P_{M_i} x_k.$$

En el caso donde $\alpha_k = 1/r$, esta iteración es equivalente a,

$$x_{k+1} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{M_i} x_k.$$

Luego se puede reescribir el método de Cimmino clásico como un método de gradiente de paso constante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{r} \nabla f(x_k),$$

Esto explica el por qué el método de Cimmino puede ser lento. Se propone, el uso de técnicas de optimización más eficientes para minimizar $f(x)$ y así acelerar el método de Cimmino. Por ejemplo, acelerar el método de Cimmino utilizando el método de Barzilai-Borwein para la minimización de $f(x)$ [41]. En este trabajo se compara el método de Cimmino con la técnica de optimización de Barzilai-Borwein y la de Cauchy [3, 22, 38, 44] para resolver problemas de punto de ensilladura.

5.3. Cimmino-Cauchy y Cimmino-Barzilai-Borwein

Haciendo otras elecciones de α_k en (5.1), podemos encontrar opciones más rápidas que el método clásico de Cimmino. Por ejemplo, se puede hacer una versión de Cimmino del método de Cauchy tomando,

$$\alpha_k = \frac{\langle g_k, g_k \rangle}{\langle g_k, H g_k \rangle}$$

donde,

$$g_k = \nabla f(x_k) = \sum_{i=1}^r x_k - P_{M_i} x_k,$$

y

$$H = \nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^r I - P_{M_i}.$$

Sin embargo, el método de Cauchy es conocido por presentar convergencia lenta; por lo tanto, utilizando este gradiente, podemos crear una versión Barzilai-Borwein del método de Cimmino para su aceleración. En esta versión, el tamaño del paso α_k es calculado como

$$\alpha_k = \frac{\langle s_{k-1}, s_{k-1} \rangle}{\langle s_{k-1}, y_{k-1} \rangle},$$

donde, $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}$ y $y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$.

Capítulo 6

EXPERIMENTACION NUMERICA

En este capítulo, se exponen resultados tras resolver problemas de punto de ensilladura de dos clases.

Clase A.- El modelo mostrado en esta clase fue extraído del artículo de L. M. Hernández [30], a través de él se obtienen problemas de punto de ensilladura al discretizar mediante el método de descomposición de dominios ecuaciones de Poisson del tipo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

Donde Ω es un dominio rectangular acotado en \mathbb{R}^2 . Sea $\partial\Omega$ la frontera de Ω y f una función dada.

El dominio Ω es subdividido en cuatro subdominios Ω_i , $i = 1, \dots, 4$, separados uno a uno por una interfaz Γ . Se definen matrices A_i , $i = 1, \dots, 4$ correspondientes a la discretización de (6.1) en cada subdominio Ω_i . La matriz A del problema de punto de ensilladura estaría definida como:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}$$

A es una matriz diagonal por bloques simétrica y positivo definida. La matriz B es obtenida por las condiciones de acoplamiento sobre la interfaz Γ . Se subdivide Γ en subinterfaces Γ_{ij} , $i, j = 1 \dots 4$, en este caso, la subinterfaz Γ_{ij} separa los subdominios Ω_i y Ω_j ; Así la matriz B es formada por la matriz B_{ij} que representa las condiciones de la subinterfaz Γ_{ij} . Cada entrada B_{ij} de B proviene de la discretización de la condición de acoplamiento

$$\forall v_i \in V_i, v_j \in V_j, w_{ij} \in W_{ij} : \int_{\Gamma_{ij}} (v_i - v_j) w_{ij} dx = 0 \quad (6.2)$$

donde,

- v_i es la solución local del subdominio Ω_i sobre Γ_{ij} .

- $V_i = \{v_i \in H'(\Omega_i); v_i|_{\partial\Omega} = 0\}$ es el espacio donde la solución local está definida.
- w_{ij} es una función de prueba en un subespacio propio $W_{ij} = H^{-1/2}(\Gamma_{ij})$.

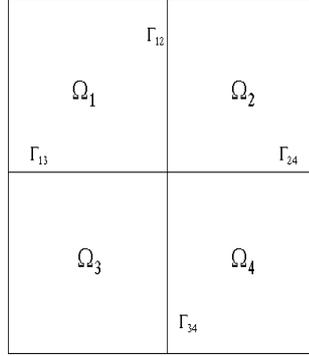


Figura 6.1: Descomposición de Dominio Ω

Así, en la discretización, la matriz B_{ij} expresa una condición del tipo:

$$\forall v_i \in V_i^h, v_j \in V_j^h, w_{ij} \in W_{ij}^h : \int_{\Gamma_{ij}} (v_i - v_j) w_{ij} dx = 0.$$

Para los experimentos numéricos se ha escogido el siguiente espacio

$$V_i^h = [\{\Phi_k^{(i)}\}_{k=1}^{n_i}] \text{ el espacio generado por } \{\Phi_k^{(i)}\}_{k=1}^{n_i}$$

donde,

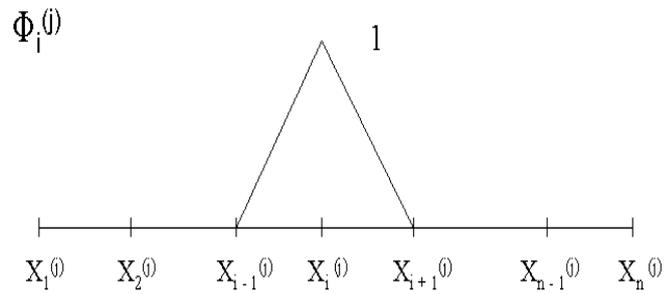
- n_i es el número de nodos en la interfaz Γ proveniente del subdominio Ω_i
- Sea $\{x_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ los nodos de la interfaz Γ que corresponden al subdominio Ω_j .

Las funciones $\Phi_k^{(j)}$, $j = 1, \dots, 4$; $k = 1, \dots, n$ están definidas por

$$\Phi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}^{(j)}}{x_k^{(j)} - x_{k-1}^{(j)}} & \text{si } x \in [x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)}] \\ \frac{x_{k+1}^{(j)} - x}{x_{k+1}^{(j)} - x_k^{(j)}} & \text{si } x \in [x_k^{(j)}, x_{k+1}^{(j)}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para $j = 2, \dots, n_j - 1$,

$$\Phi_1^{(j)}(x) = \begin{cases} \frac{x_2^{(j)} - x}{x_2^{(j)} - x_1^{(j)}} & \text{si } x \in [x_1^{(j)}, x_2^{(j)}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Figura 6.2: Función $\Phi_i^{(j)}$.

y

$$\Phi_{n_j}^{(j)}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n_j-1}^{(j)}}{x_{n_j}^{(j)}-x_{n_j-1}^{(j)}} & \text{si } x \in [x_{n_j-1}^{(j)}, x_{n_j}^{(j)}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para W_{ij}^h se escoge el espacio que tiene la dimensión más pequeña entre V_i^h y V_j^h , estando los nodos distribuidos uniformemente en la iterfaz de cada subdominio.

Clase B.- Problemas de punto de ensilladura provenientes de la discretización de problemas de Stokes Generalizado del tipo:

$$\begin{cases} \alpha \bar{u} - v \Delta \bar{u} + \nabla p = f, & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0, & \text{en } \Omega, \\ \bar{u} = \bar{u}_0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.3)$$

El procedimiento que muestra la discretización de (6.3) se encuentra de manera explícita en el artículo de J. P. Chehab [11].

6.1. Resultados

En esta sección se presenta y compara el rendimiento de los siguientes métodos:

- Cimmino
- Cimmino-Cauchy

- Cimmino-Barzilai-Borwein.

Tras resolver con ellos problemas de punto de ensilladura de diversas dimensiones de la clase **A** y **B**.

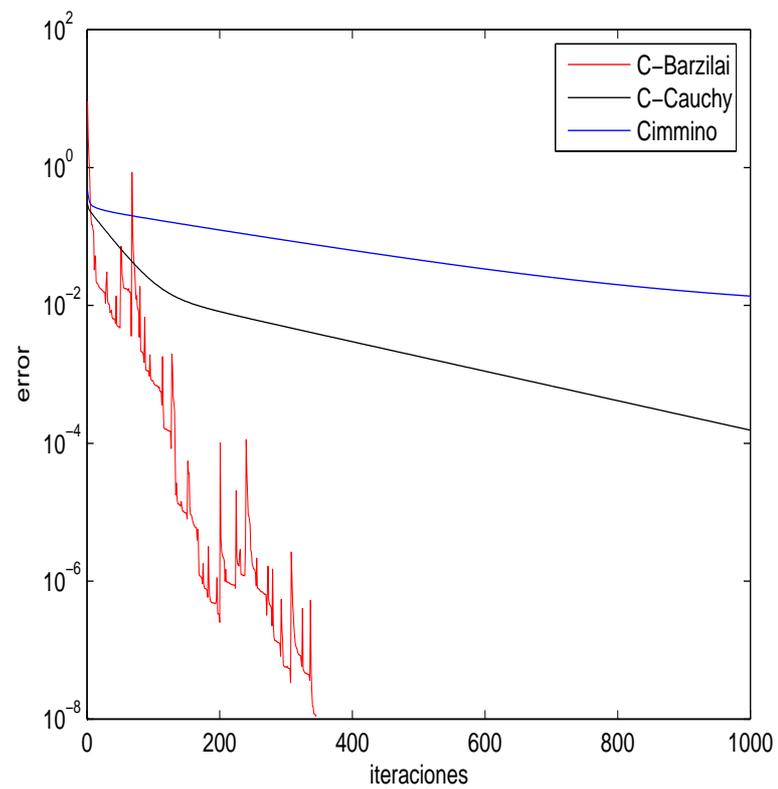
Por cada problema, se particionará la matriz B por bloques con el objetivo de deducir si la velocidad de convergencia de los métodos depende o no de dicha partición.

El Tiempo/ N° de bloques; es un cálculo que se incluye por experimento con la finalidad de ayudar a dar una visión de la rapidez del método, si se utiliza un procesador por bloque simultáneamente para la resolución de un problema.

Todos los experimentos fueron realizados con un procesador Intel Dual-Core de 3.00 GHz, usando MATLAB 7.

Clase A

Problema 1.

 $B \in M_{20 \times 160}$. $A \in M_{160 \times 160}$.Figura 6.3: Partición de B : fila a fila.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/Nº de bloques
Cimmino Espectral	346	0,7800	0,039
Cimmino Cauchy	$i > 1000$	$t > 4,3056$	$\approx 0,21528$
Cimmino	$i > 1000$	$t > 2,1372$	$\approx 0,1068$

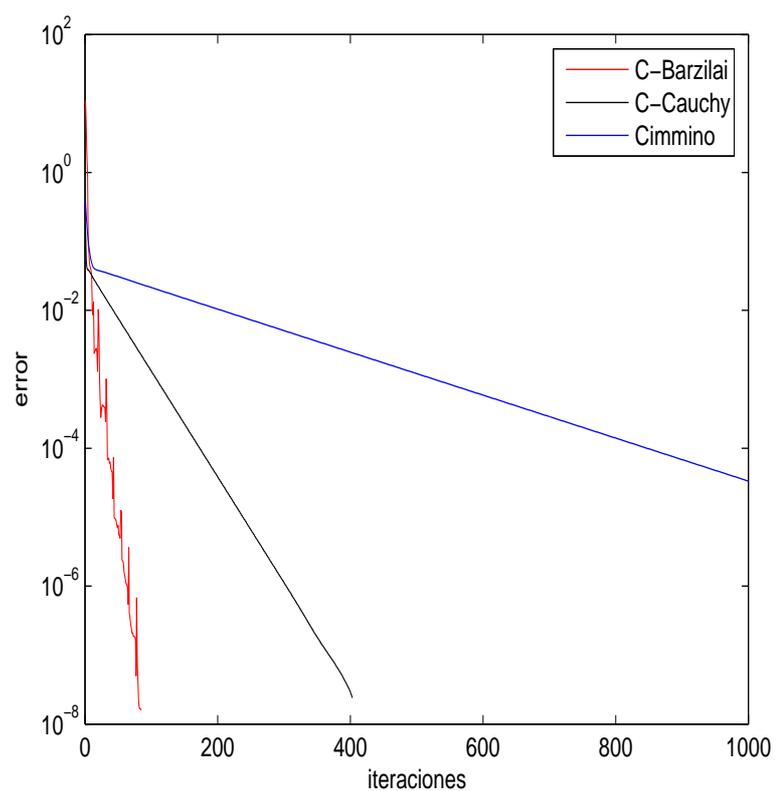


Figura 6.4: Partición de B : 5 bloques de 4 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	85	4,9296	0,9859
Cimmino Cauchy	403	42,8067	8,5613
Cimmino	$i > 1000$	$t > 64,0696$	$\approx 12,8139$

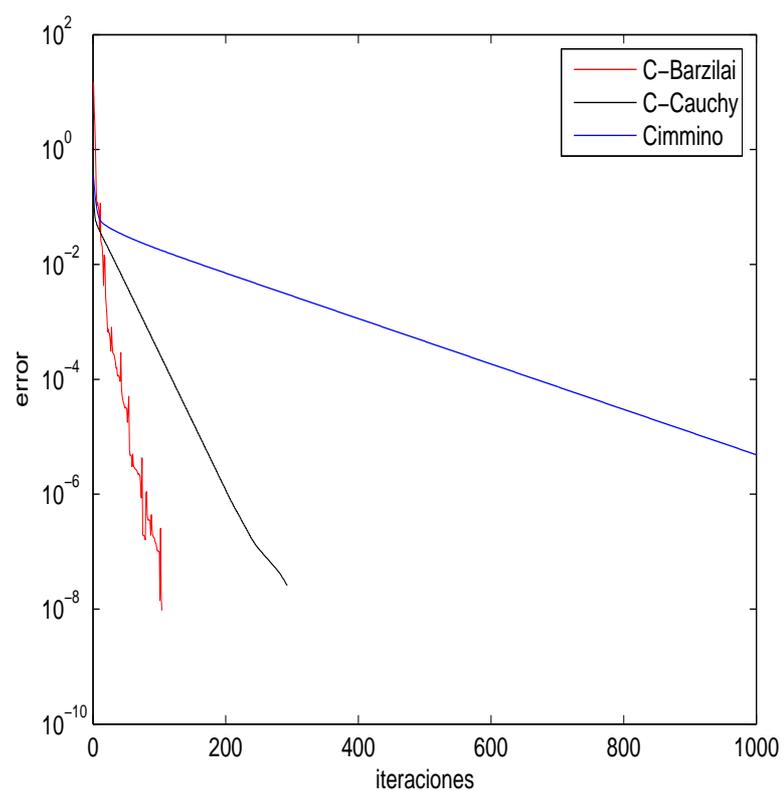


Figura 6.5: Partición de B : 4 bloques de 5 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	104	5,6004	1,4001
Cimmino Cauchy	293	28,4702	7,1175
Cimmino	$i > 1000$	$t > 60,2320$	$\approx 15,05$

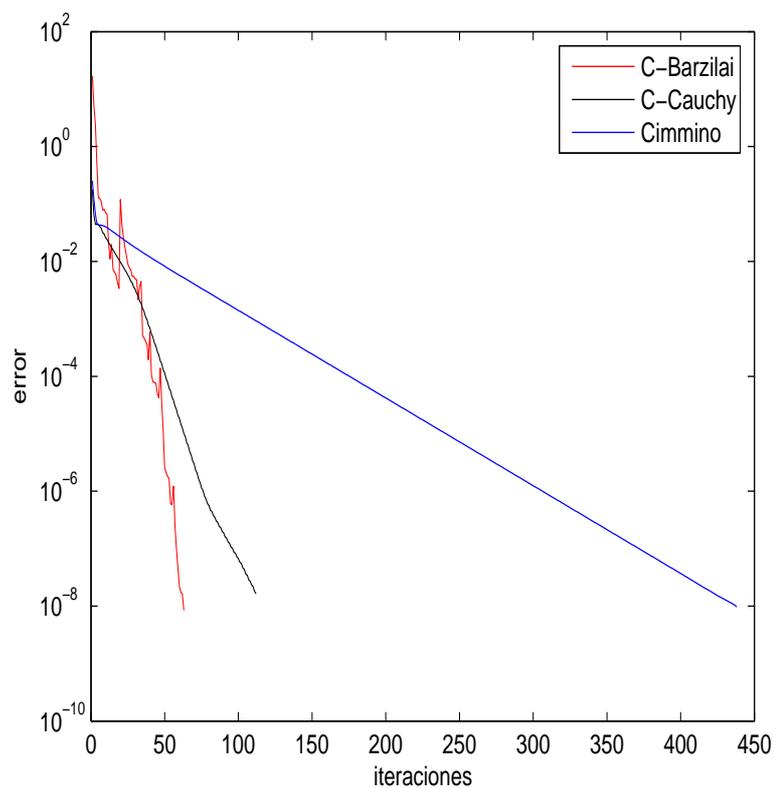


Figura 6.6: Partición de B : 2 bloques de 10 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	63	3,0576	1,5588
Cimmino Cauchy	112	8,6113	4,3056
Cimmino	438	17,4409	8,7204

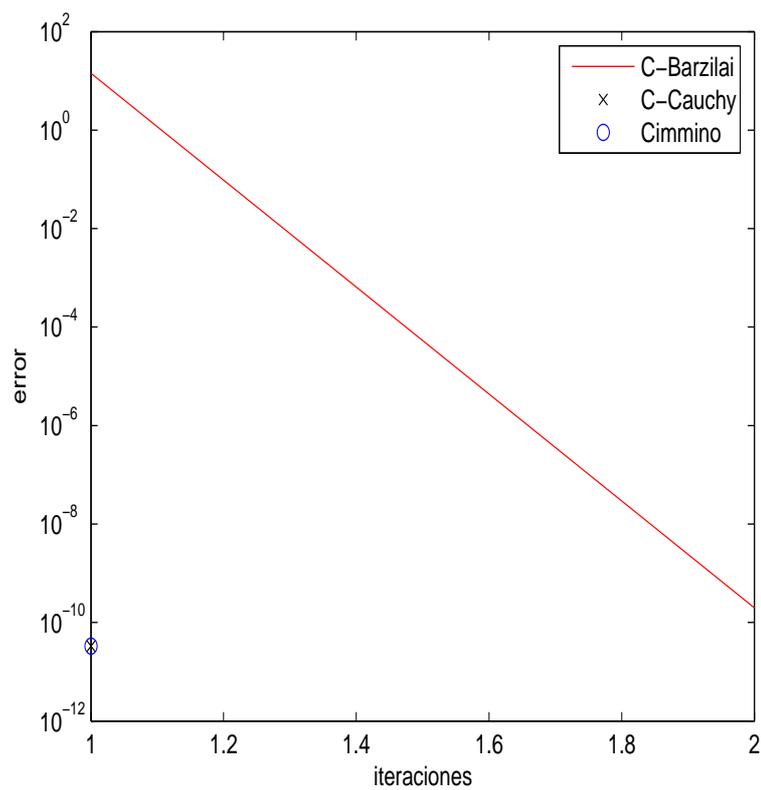
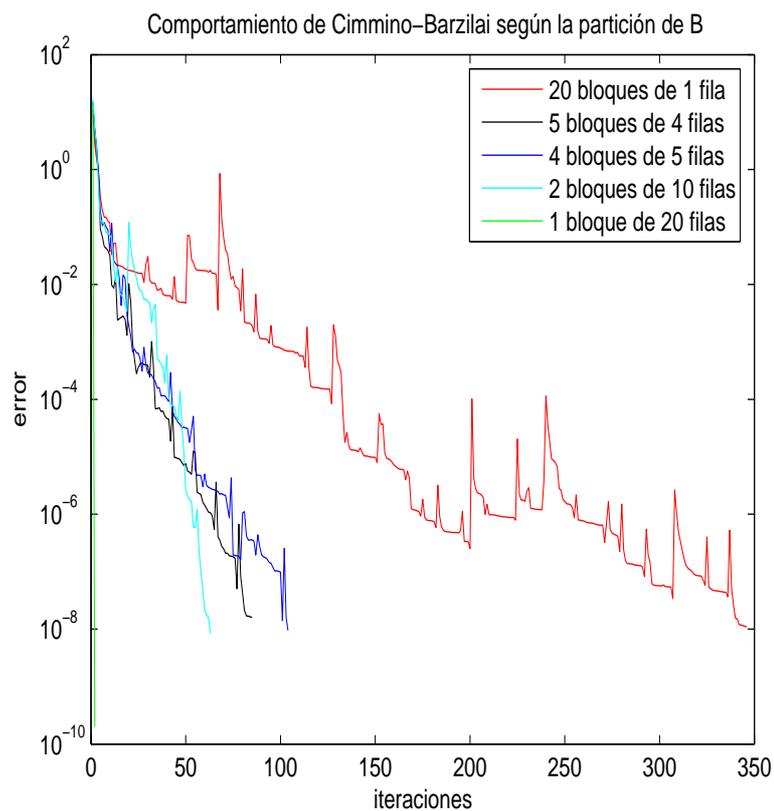


Figura 6.7: Partición de B : 1 bloque de 20 filas.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	2	0,1716	0.1716
Cimmino Cauchy	1	0,1092	0.1092
Cimmino	1	0,0624	0.0624



Partición de B	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
20 bloques de 1 fila	346	0,7800	0,039
5 bloques de 4 filas	85	4,9296	0,9859
4 bloques de 5 filas	104	5,6004	1,4001
2 bloques de 10 filas	63	3,0576	1,5588
1 bloque de 20 filas	2	0,1716	0,1716

Problema 2.
 $B \in M_{40 \times 640}$.
 $A \in M_{640 \times 640}$.

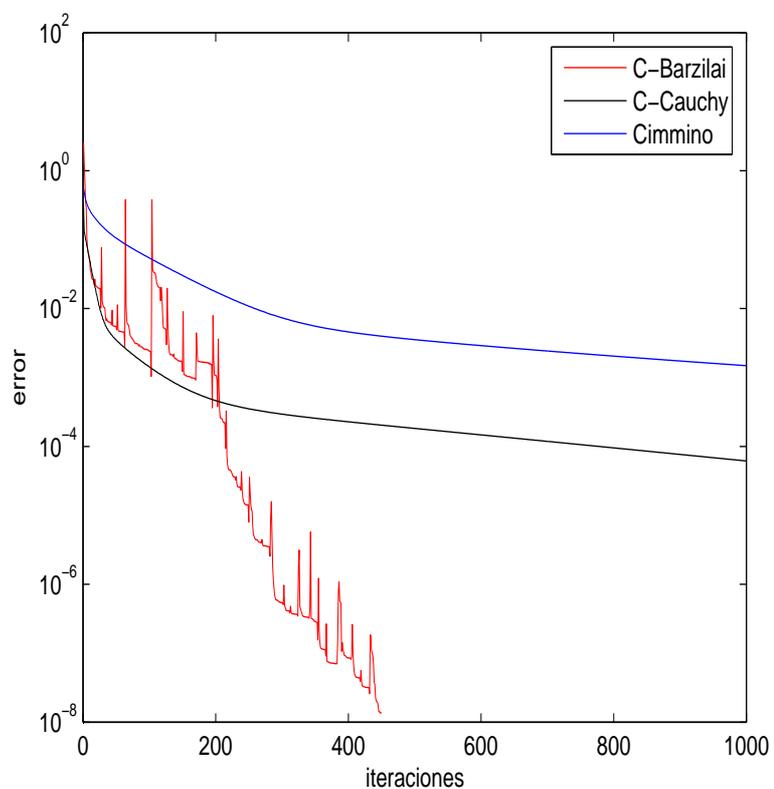


Figura 6.8: Partición de B : fila a fila.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	450	3,2916	0,08229
Cimmino Cauchy	$i > 1000$	$t > 14,0089$	$\approx 0,35022$
Cimmino	$i > 1000$	$t > 7,1448$	$\approx 0,1786$

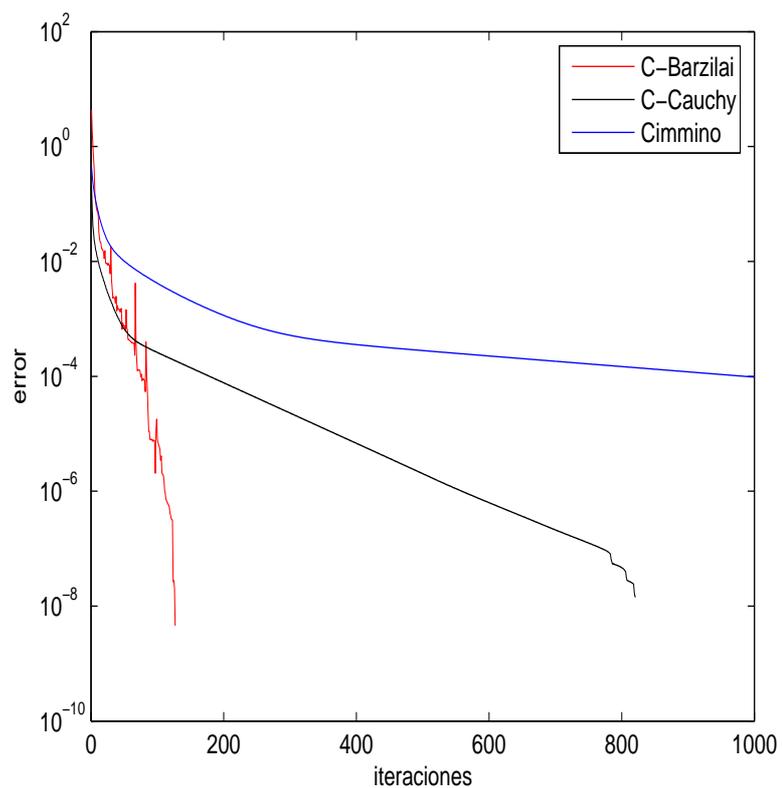


Figura 6.9: Partición de B : 8 bloques de 5 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	127	49,1091	6,1386
Cimmino Cauchy	821	479,0479	59,88098
Cimmino	$i > 1000$	$t > 341,2678$	$\approx 42,6584$

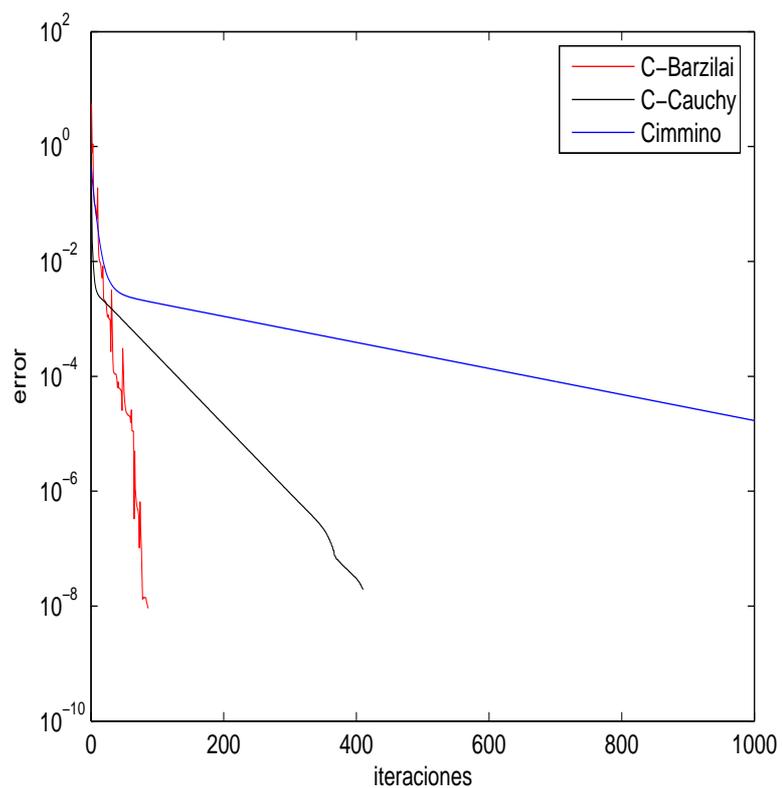


Figura 6.10: Partición de B : 5 bloques de 8 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	86	24,6482	4,9296
Cimmino Cauchy	410	183,3636	36,6727
Cimmino	$i > 1000$	$t > 292,8295$	$\approx 58,5659$

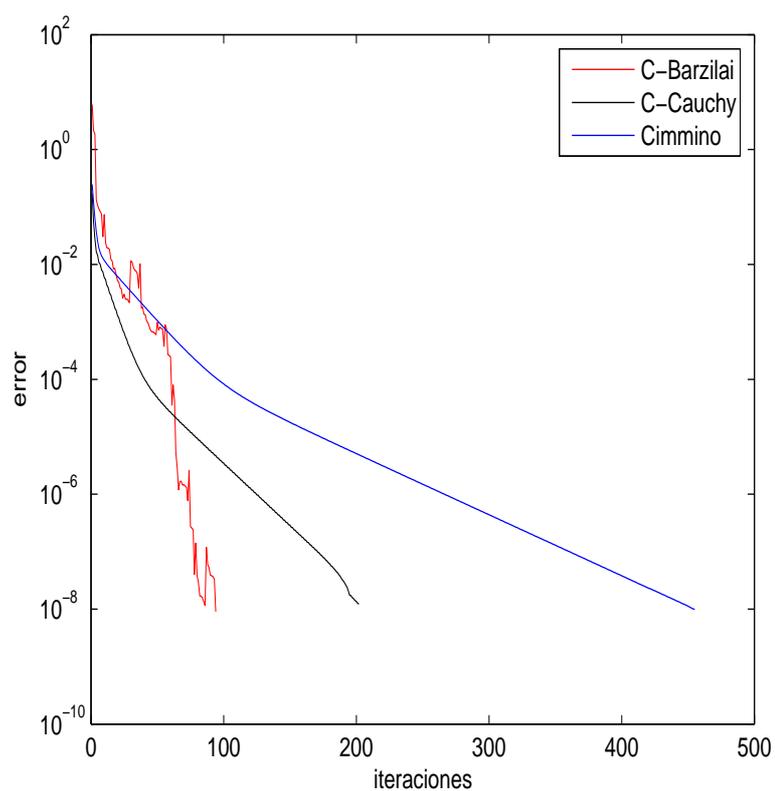


Figura 6.11: Partición de B : 2 bloques de 20 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	94	17,6749	8,8394
Cimmino Cauchy	202	56,0200	28,01
Cimmino	455	68,6872	34,3436

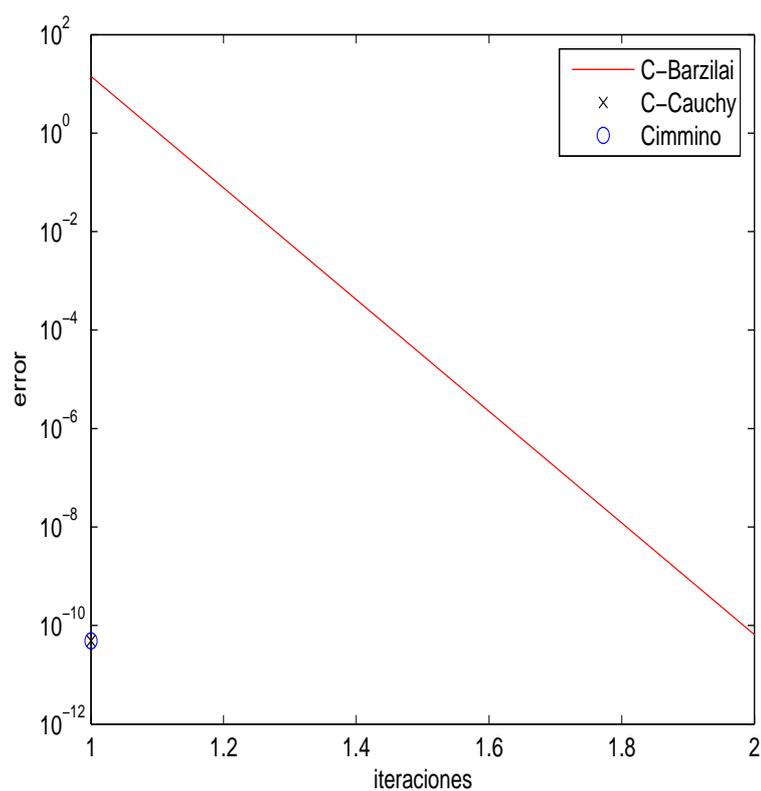
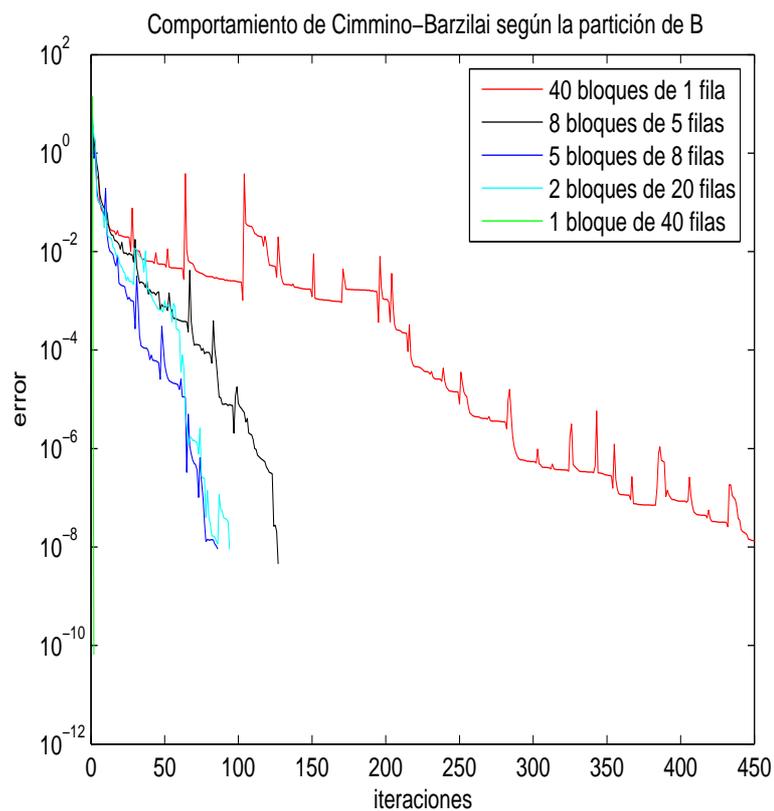


Figura 6.12: Partición de B : 1 Bloque de 40 filas.

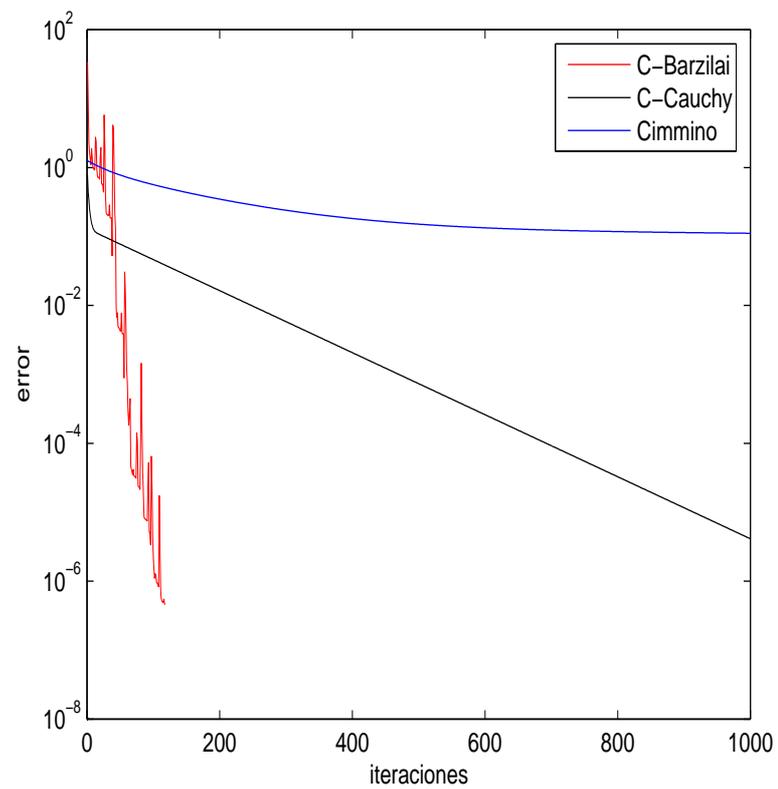
Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	2	0,6552	0,6552
Cimmino Cauchy	1	0,4212	0,4212
Cimmino	1	0,2028	0,2028



Partición de B	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
40 bloques de 1 fila	450	3,2916	0,08229
8 bloques de 5 filas	127	49,1091	6,1386
5 bloques de 8 filas	86	24,6482	4,9296
2 bloques de 20 filas	94	17,6749	8,8394
1 bloque de 40 filas	2	0,6552	0,6552

Clase B

Problema 1.

 $B \in M_{48 \times 84}$. $A \in M_{84 \times 84}$.Figura 6.13: Partición de B : fila a fila.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/Nº de bloques
Cimmino Espectral	118	0,6240	0,013
Cimmino Cauchy	$i > 1000$	$t > 9,5005$	$\approx 0,1979$
Cimmino	$i > 1000$	$t > 4,6956$	$\approx 0,097$

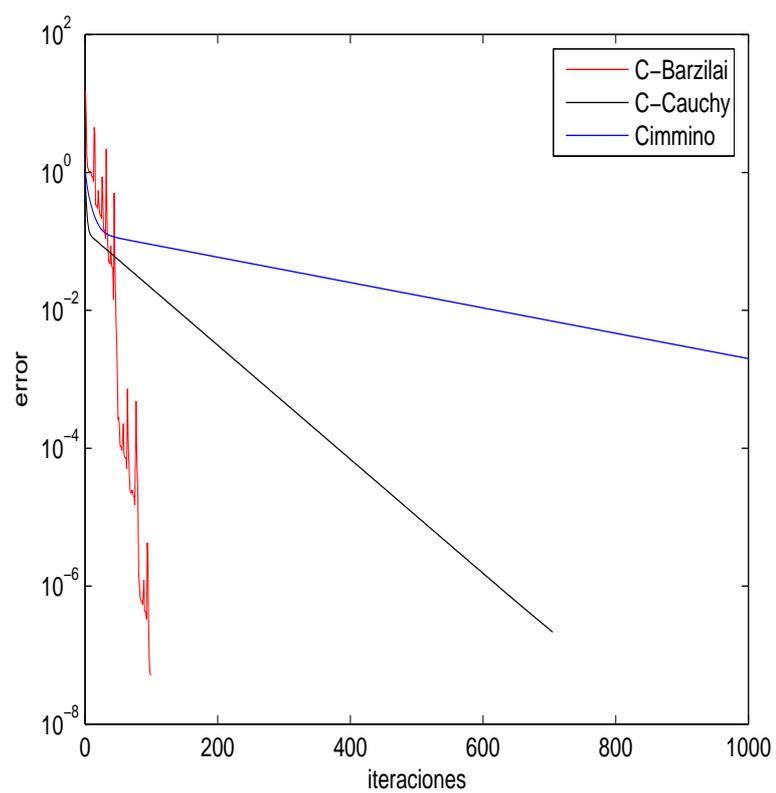


Figura 6.14: Partición de B : 4 bloques de 12 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	99	4,9140	1,2285
Cimmino Cauchy	705	56,3476	14,0869
Cimmino	$i > 1000$	$t > 55,3492$	$\approx 13,8373$

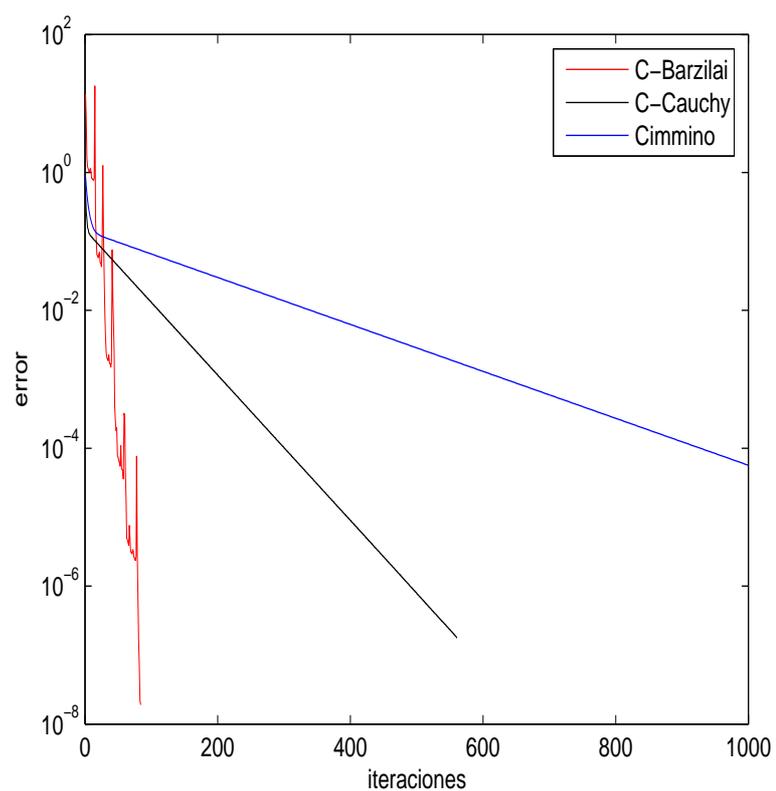


Figura 6.15: Partición de B : 3 bloques de 16 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	84	3,5568	1,1856
Cimmino Cauchy	561	38,1110	12,7036
Cimmino	$i > 1000$	$t > 42,3075$	$\approx 14,1025$

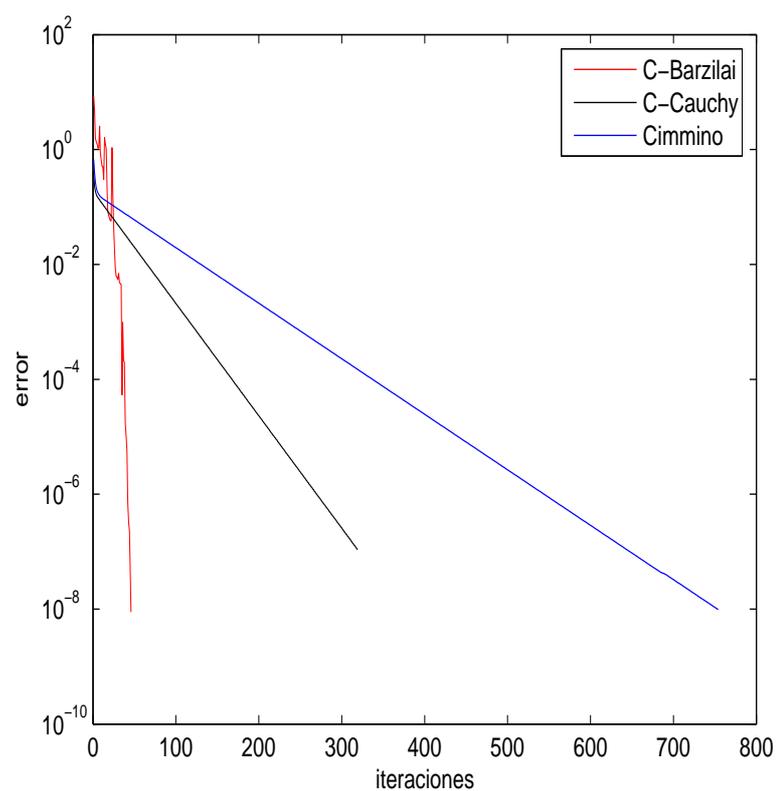


Figura 6.16: Partición de B : 2 bloques de 24 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	46	1,8876	0,9438
Cimmino Cauchy	319	19,0009	9,5
Cimmino	754	21,3877	10,6938

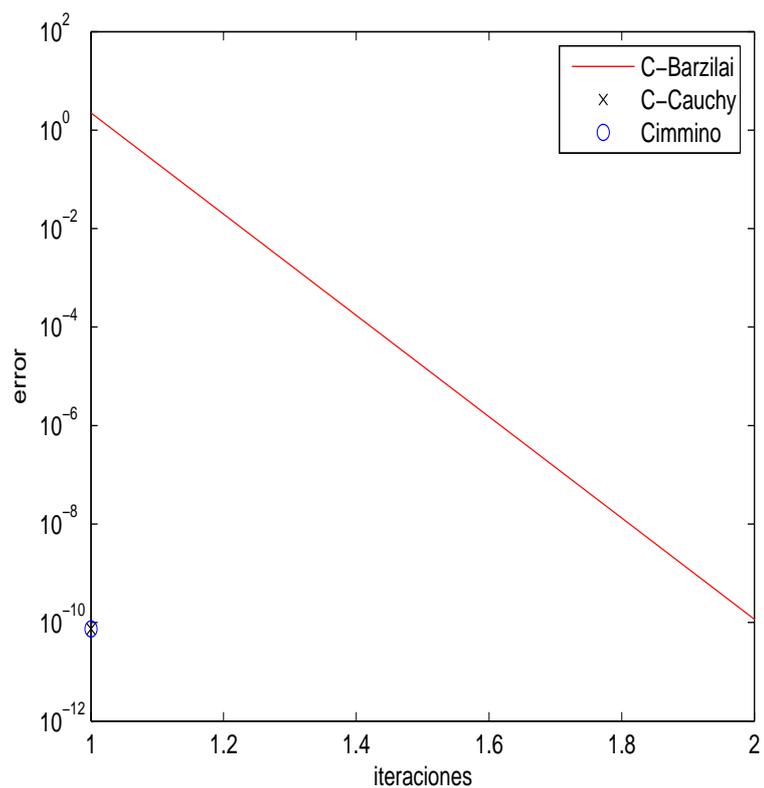
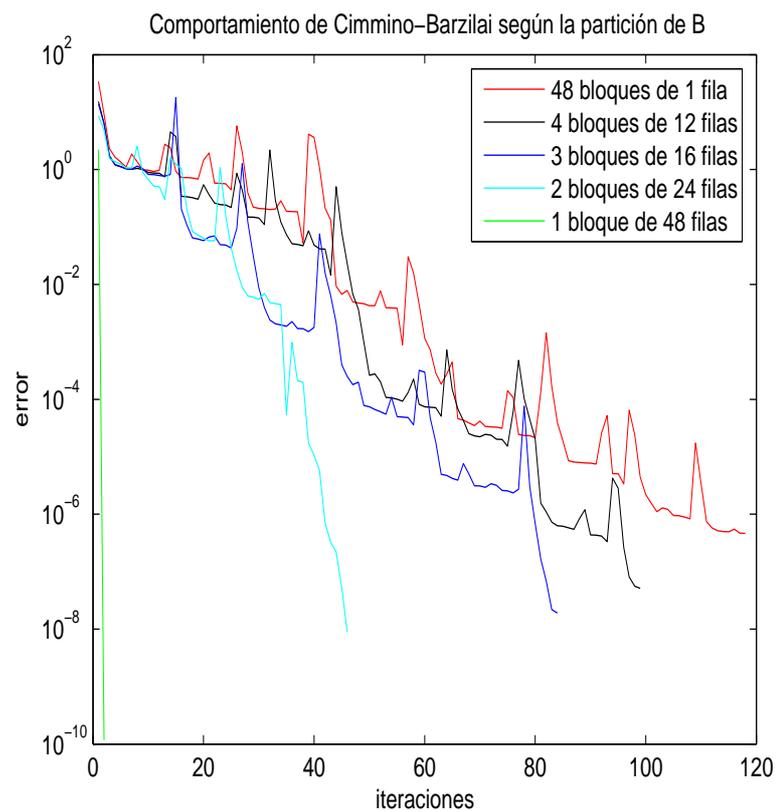


Figura 6.17: Partición de B : 1 bloque de 48 filas.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	2	0,1248	0,1248
Cimmino Cauchy	1	0,1092	0,1092
Cimmino	1	0,0624	0,0624



Partición de B	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
48 bloques de 1 fila	118	0,6240	0,013
4 bloques de 12 filas	99	4,9140	1,2285
3 bloques de 16 filas	84	3,5568	1,1856
2 bloques de 24 filas	46	1,8876	0,9438
1 bloque de 48 filas	2	0,1248	0,1248

Problema 2.
 $B \in M_{80 \times 144}$.
 $A \in M_{144 \times 144}$.

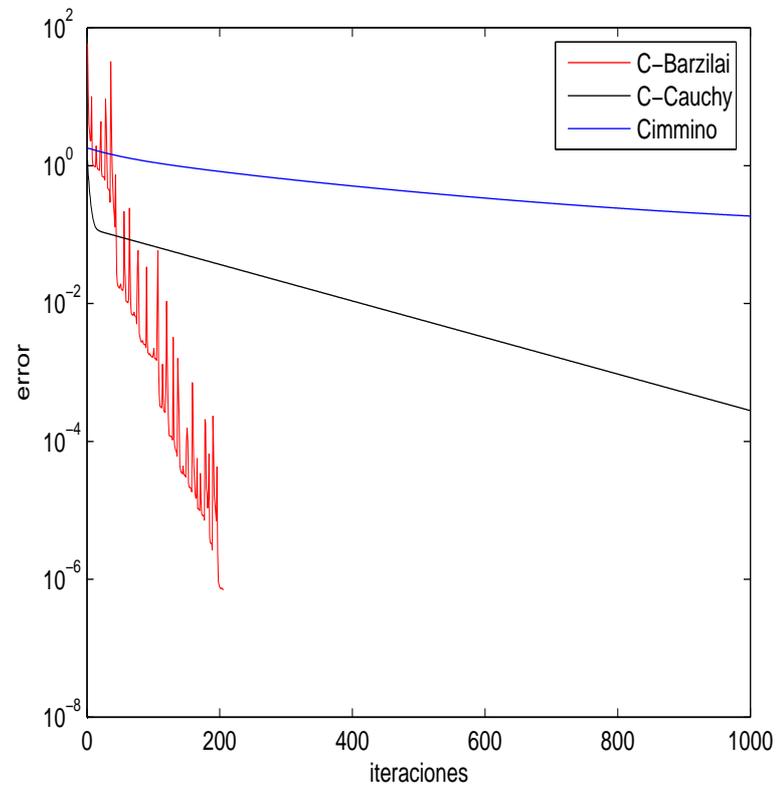


Figura 6.18: Partición de B : fila a fila.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	206	1,9500	0,02437
Cimmino Cauchy	$i > 1000$	$t > 18,1273$	$\approx 0,2265$
Cimmino	$i > 1000$	$t > 9,0949$	$\approx 0,1136$

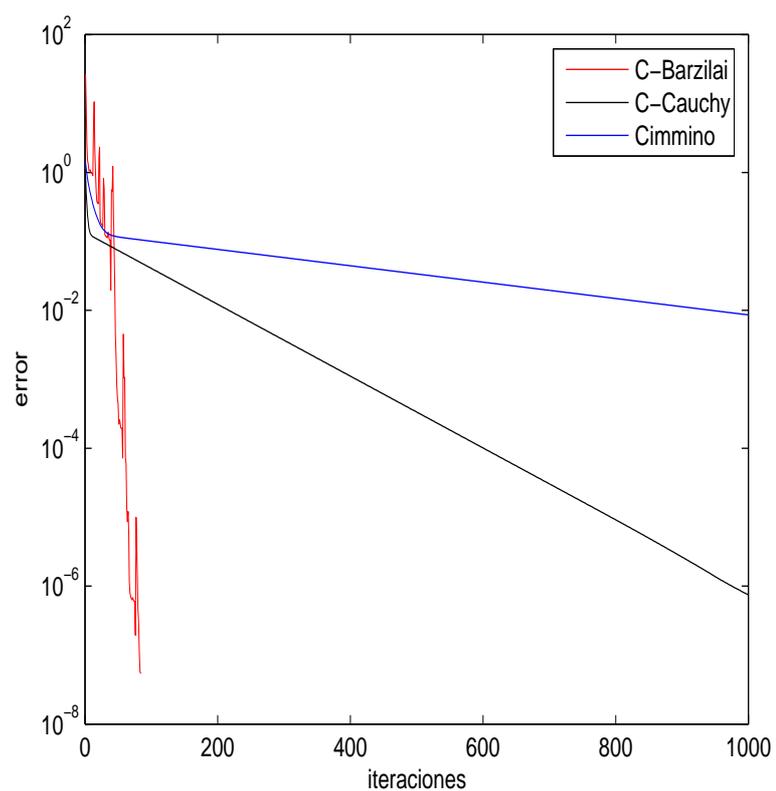


Figura 6.19: Partición de B : 4 bloques de 20 filas cada uno.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	84	7,7376	1,9344
Cimmino Cauchy	$i > 1000$	$t > 139,9329$	$\approx 34,9832$
Cimmino	$i > 1000$	$t > 97,7346$	$\approx 24,4336$

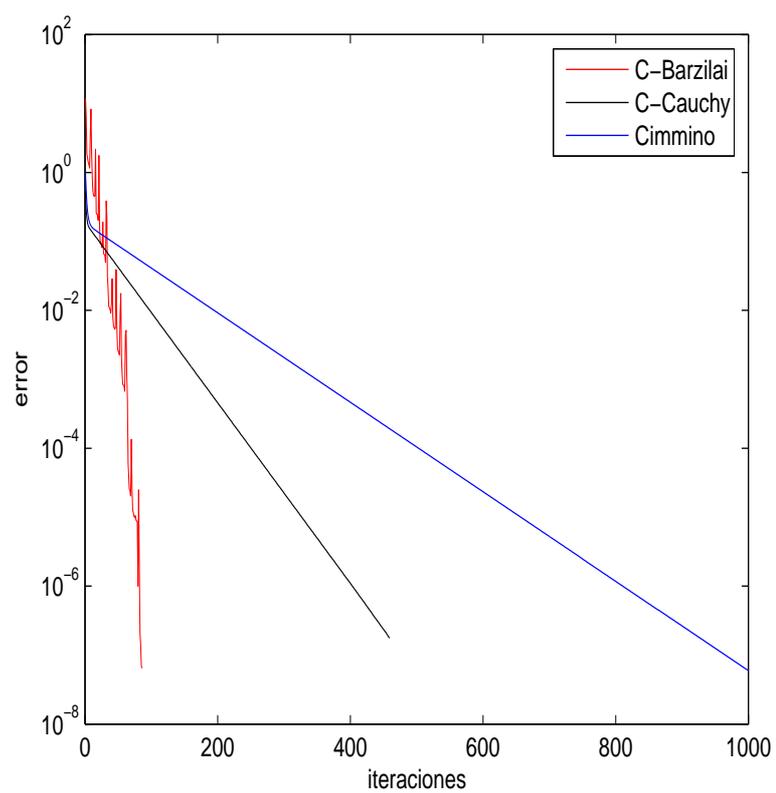


Figura 6.20: Partición de B : 2 bloque de 40 filas.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
Cimmino Espectral	86	6,2712	3,1356
Cimmino Cauchy	459	50,1387	25,0693
Cimmino	$i > 1000$	55,7860	27,893

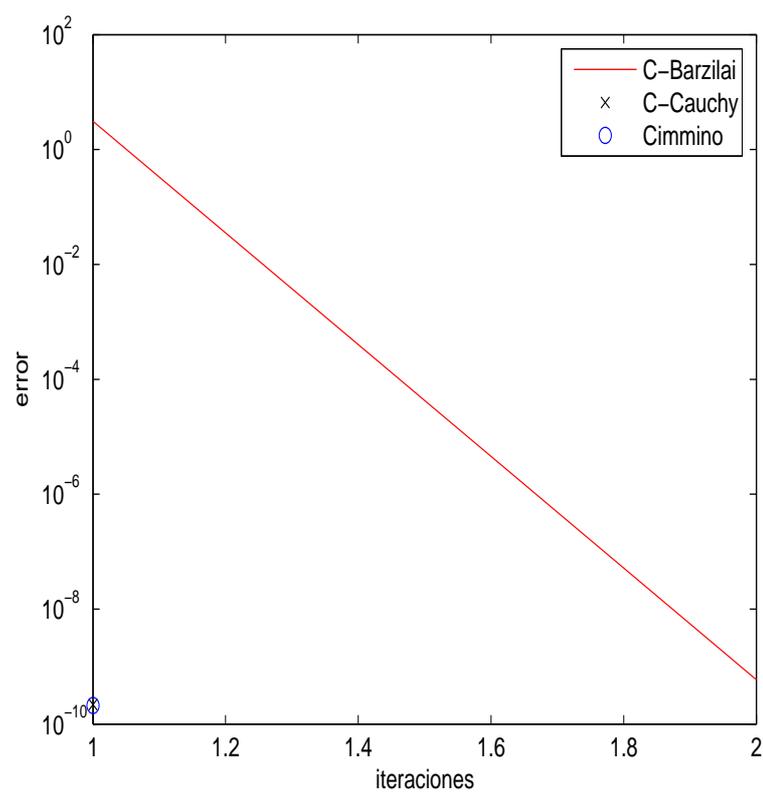
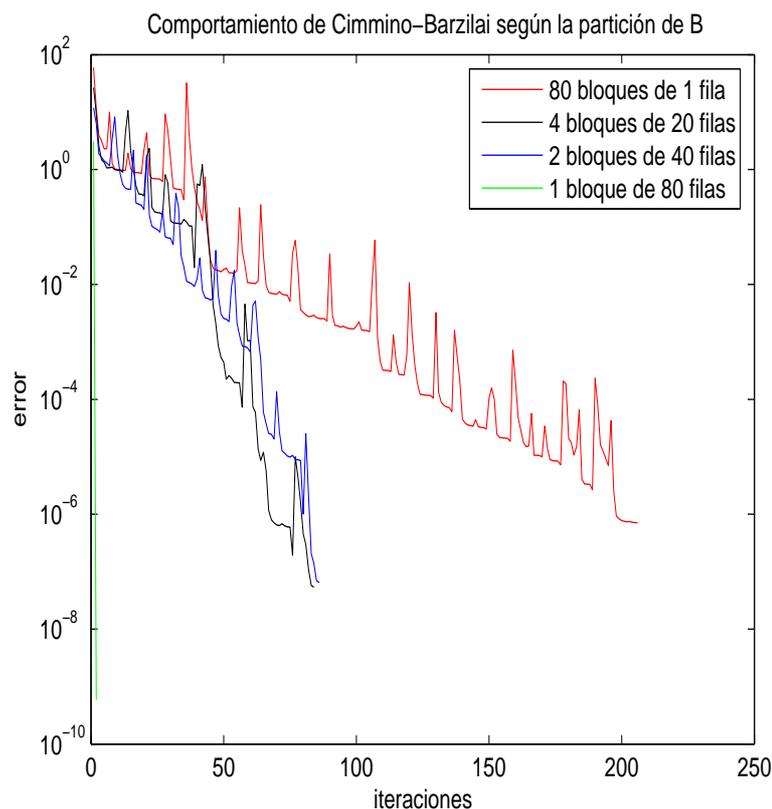


Figura 6.21: Partición de B : 1 bloque de 80 filas.

Método	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/Nº de bloques
Cimmino Espectral	2	0,2808	0,2808
Cimmino Cauchy	1	0,1716	0,1716
Cimmino	1	0,0780	0,0780



Partición de B	Iteraciones	Tiempo	Tiempo/N° de bloques
80 bloques de 1 fila	206	1,9500	0,02437
4 bloques de 20 filas	84	7,7376	1,9344
2 bloques de 40 filas	86	6,2712	3,1356
1 bloque de 80 filas	2	0,2808	0,2808

6.2. Comparación de los métodos

En las gráficas se observa que la velocidad de convergencia del método de Cimmino-Barzilai-Borwein “C-Barzilai”, se destaca ante los otros métodos.

Los experimentos muestran que las particiones uniformes de la matriz B , disminuyen el número de iteraciones de los métodos.

Observaciones:

- Al particionar B fila a fila, Cimmino-Barzilai-Borwein se ejecuta en el menor tiempo, pero, con más iteraciones; de igual forma, esta es la opción más tentadora de utilizar el algoritmo. Otras particiones de B disminuyen el número de iteraciones, pero, aumentan el tiempo de ejecución; hecho que se puede solventar realizando una versión acelerada del algoritmo.
- El algoritmo de Cimmino-Cauchy obtiene mejor tiempo de ejecución para la partición de B fila a fila, pero, presenta una convergencia muy lenta; a menudo, es buena opción utilizar este método particionando a B en dos bloques, de esta manera converge con más rapidez y con un tiempo considerable.

Conclusiones

Tras el análisis de los experimentos se puede presentar el siguiente conjunto de conclusiones:

- Es posible acelerar el método de Cimmino mediante estrategias de optimización con muy buenos resultados experimentales. Según los resultados, la aceleración con mejor desempeño fue la espectral.
- Los problemas de punto de ensilladura pueden ser vistos como problemas de mejor aproximación y el método de Cimmino puede ser utilizado para su resolución sobre arquitecturas paralelas.
- El método de Cimmino-Cauchy acelera el método de Cimmino, sin embargo, se ve superado por Cimmino Espectral tanto en su tiempo de ejecución como en su número de iteraciones.

Para dar continuidad a esta investigación se recomienda:

- Realizar experimentos con este método empleando procesadores paralelos.
- Acelerar el método de Cimmino mediante el método de gradientes conjugados.

Bibliografía

- [1] N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels*. Trans. Amer. Math. Soc. 68, p. 337-404, 1950.
- [2] K. J. Arrow, L. Hurwicz, y H. Uzawa. *Studies in Linear and Nonlinear Programming*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1958.
- [3] J. Barzilai y J. M. Borwein. *Two point step size gradient methods*. IMA J. Numer. Anal 8, p. 141-148, 1988.
- [4] M. Benzi. *Gianfranco Cimmino's Contributions to Numerical Mathematics*, p. 7-9, 2005.
- [5] M. Benzi, G. Golub, y J. Liesen. *Numerical solution of saddle point problems*, 90 p. Acta Numerica 2005.
- [6] R. H. Bielschowsky, A. Friedlander, F. A. M. Gomes, J. M. Martinez y M. Raydan. *An adaptive algorithm for bound constrained quadratic minimization*. *Investigación Operativa*, p. 67-102, 1997.
- [7] A. Bossavit, *'Mixed' systems of algebraic equations in computational electromagnetics*, COMPEL, 17, p. 59-63, 1998.
- [8] C. Byrne. *A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction*. Inverse Problems, p. 103-120, 2004.
- [9] Y. Censor. *Computational acceleration of projection algorithms for the linear best approximation problem*. Linear Algebra and its Applications, p. 111-123, 2006.
- [10] G. Cimmino. *Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari*, La Ricerca Scientifica, II, p. 326-333, 1938.
- [11] J. P. Chehab. *Solution of generalized Stokes problems using hierarchical methods and Incremental Unknowns*. Elsevier Science B. V, Applied Numerical Mathematics 21, p. 15-27, 1996.
- [12] W. Cheney y A. Goldstein. *Proximity maps for convex sets*, Amer. Math 10, p. 448-450, 1959.
- [13] Y. H. Dai y L. Z. Liao. *R-linear convergence of the Barzilai and Borwein gradient method*, IMA Journal on Numerical Analysis 22, p. 1-10, 2002.

- [14] L. Debnath y P. Mikusinski. *Introduction to Hilbert Space with Applications*. New York, 1990.
- [15] J. E. Dennis Jr. y R.B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [16] F. Deutsch. *The Method of Alternating Orthogonal Projections*. Netherlands. 1992.
- [17] F. Deutsch. *Best Approximation in Inner Product Spaces*. Springer. New York, p. 21-84, 2001.
- [18] F. Deutsch. *The Angle Between Subspaces of a Hilbert Space*. Pennsylvania State University U.S.A, [s. a].
- [19] M. Domínguez y R. Bruzual. *Espacios de Hilbert*. Universidad Central de Venezuela, p. 37-41, 2005.
- [20] F. Duchin y D. B. Szyld. *Application of sparse matrix techniques to inter-regional input-output analysis*, Economics of Planning 15, p. 142-167, 1979.
- [21] R. Escalante y M. Raydan. *Alternating Projection Methods*. Theory and application. (En preparación).
- [22] R. Fletcher. *On the Barzilai-Borwein method*, Department of Mathematics, University of Dundee, NA/207, Dundee, Scotland, p. 235-256, 2001.
- [23] K. Friedrichs. *On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables*. Trans Amer Math. Soc 41, p. 321-364, 1937.
- [24] U. M. Garcia-Palomares y F. J. Gonzalez- Castano. *Incomplete projection algorithms for solving the convex feasibility problem*. Numerical Algorithms 18, p. 177-193, 1998.
- [25] W. B. Gearhart y M. Koshy. *Acceleration schemes for the method of alternating projections*. J. Comp. Appl. Math 26, p. 235-249, 1989.
- [26] R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [27] E. L. Hall. *Computer Image Processing and Recognition*. Academic Press, New York, NY, 1979.
- [28] P. Halmos. *Introduction to Hilbert Space*. Chelsea, New York, 1951.
- [29] G. T. Herman, A. Lent y P. H. Lutz. *Iterative relaxation methods for image reconstruction*, Communications of the ACM 21, p. 152-158, 1978.
- [30] L. M. Hernández. *Alternating oblique projections for coupled linear systems*. Numerical Algorithms 38, p. 285-303, 2005.

- [31] L. M. Hernández. *Accelerated Cimmino's methods for saddle point problems*. (En preparación).
- [32] L. M. Hernández. *Aceleración espectral del método de proyecciones alternantes*. (En preparación).
- [33] G. N Hounsfield. *Computerized transverse axial scanning (tomography): Part I Description of system*, British J. Radiol 46, p. 1016-1022, 1973.
- [34] S. Kaczmarz. *Angenaherte auflosung von systemen linearer gleichungen*, Bull international A cad. Pol. Sci 35, p. 335-357, 1937.
- [35] S. Kayalar y H. L. Weinert. *Error bounds for the method of alternating projections*. Math. Control Signals Systems 1, p. 43-59, 1988.
- [36] F. Luengo, M. Raydan, W. Glunt y T. L. Hayden. *Preconditioned spectral gradient method*. Numerical Algorithms 30, p. 241-258, 2002.
- [37] J. M. Martinez. *An accelerated successive orthogonal projection method for solving large-scale linear feasibility problems*. Computers and Mathematics with Appl 15, p. 367-373, 1988.
- [38] B. Molina y M. Raydan. *Preconditioned Barzilai-Borwein method for the numerical solution of partial diferencial equations*, Numerical Algorithms 13, p. 45-60, 1996.
- [39] A. De Pierro y A. Iusem. *A parallel projection method for finding a common point of a family of convex sets*. Pesquisa Operacional 5, p. 1-20, 1985.
- [40] Y. Qing Hu y Y. Hong Dai. *Inexact Barzilai-Borwein method for saddle point problems*, Numerical Linear Algebra with Applications, Volume 14, Issue 4, p. 299-317, [s. a].
- [41] Qingzhi, Yang y Jinling, Zhao. *Some Remarks on the Convex Feasibility Problem and Best Approximation Problem*, Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications, Numer. Math. Theor. Meth. Appl., Vol. 1, No. 1, p. 78-91, 2008.
- [42] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Diferential Equations*, vol. 23 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [43] M. Raydan. *Minimización Irrestriccta de Gran Escala*. (En preparación)
- [44] M. Raydan. *On the Barzilai and Borwein choice of steplength for the gradient method*, IMA Journal of Numerical Analysis 13, p. 321-326, 1993.
- [45] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PSW Publishing Company, U.S.A, p. 132-136, 2000.
- [46] K. T. Smith, D. C. Solman y S. L. Wagner. *Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs*. Bull. Amer. Math. Soc. 83, p. 1227-1270, 1977.

-
- [47] G. Sulbarán. *Aceleración espectral del método de proyecciones alternantes*. L. M. Hernández (tutor). Tesis de Licenciatura. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Venezuela. 2008.
- [48] L. T. Dos Santos. *A parallel subgradient projections method for the convex feasibility problem*. J. Comput. Appl. Math 18, p. 307-320, 1987.
- [49] J. Von Neumann. *Functional Operators-Vol II. The Geometry of Orthogonal Spaces*, Annals of Math, Princeton University Press. 1950.
- [50] N. Wiener y P. Masani. *The prediction theory of multivariate stochastic processes*, Acta Math 93, p. 95-137, 1957.