UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Curso Introductorio
Matemáticas Básicas
Guía Teórica - Practica

Caracas, Venezuela
Julio 2009

Índice general

Introducción

El Curso de Inducción, dirigido a los estudiantes de nuevo ingreso a la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, tiene como propósito iniciar al estudiante a la vida universitaria brindándole asesoramiento a través de los talleres de orientación vocacional y hábitos de estudio y nivelarlo académicamente en las áreas de comprensión lectora y matemáticas.

En el área de matemática el objetivo del curso es reforzar en los estudiantes de nuevo ingreso el conocimiento matemático, haciendo énfasis en una metodología de razonamiento lógico, pensamiento abstracto, a través de la resolución de problemas, brindándole al estudiante herramientas que permitan valorar el conocimiento matemá tico.

El Departamento de Matemática ha elaborado esta guía con ayuda de los profesores y preparadores que laboran en el departamento, que este añ o (2009) servirán de facilitadores para el curso.

Quiero agradecer muy especialmente a los Profesores: Robert Espitia, Maricarmen Andrade, Yeiremi Freites a los preparadores Sahid Leal y Daniela Torrealba, asi como también a las Señoras Mildred Graterol y Diosa Nieto secretarias del Departamento de Matemática por su valiosa colaboración.

Prof. Mariela Castillo
Jefa del Departamento de Matemática.
Escuela de Matemática.
Facultad de Ciencias.
Universidad Central de Venezuela.
Julio 2009

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

1.1. Operaciones con Números reales

$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Sus elementos son: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n, ...$

- La suma de números naturales es un número natural.
- La Adición de números naturales satisface las propiedades conmutativa, asociativa y tiene un elemento neutro que es el 0.
- El producto de números naturales satisface las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva respecto a la adición y tiene un elemento neutro que es el 1.
- La sustracción y la división de números naturales no siempre resulta un número natural. Así, al restar $3-5$ y al dividir $12 \div 5$, la diferencia y el cociente no son números naturales.

$\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros. Sus elementos son: $..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...$
Luego $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- La suma de números enteros es un número entero.
- La Adición de números enteros es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro que es el 0.
- Todo número entero tiene su opuesto o simétrico aditivo: el opuesto de x es $-x$.

- Para sumar dos número enteros debe tomarse en cuenta sus signos. As í

$$(-2) + (-3) = -2 - 3 = -5, \qquad 7 - 3 = 4, \qquad 2 - 8 = -6.$$

- El producto de números enteros es un número entero.
- La Multiplicación de números enteros es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro que es el 1, se cumple la propiedad distributiva con respecto a la adición.
- Para multiplicar dos números enteros debe tomarse en cuenta sus signos. Así:

$$4 \cdot 5 = 20 = -4 \cdot (-5) \qquad -4 \cdot 5 = -20 = 4 \cdot (-5)$$

- La División de números enteros no siempre resulta un número entero. Así, al dividir $-14 \div 3$, el cociente no es un número entero.

$\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales o de las fracciones. Un número racional es el cociente de dos números enteros $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$. Luego $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- Todas las operaciones de suma, resta, multiplicación y divisió n (la división por cero no tiene sentido) son cerradas en Q (siempre que se obtiene un número racional).
- La adición de números racionales es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro que es el 0 y todo número tiene su opuesto o sim étrico aditivo.
- La multiplicación de números racionales, es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro que es el 1 y todo número diferente de cero tiene su inverso o simétrico multiplicativo:

  El inverso de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}, a \neq 0.b \neq 0$.

$\mathbb{I}$ es el conjunto de los números irracionales.

Sus elementos son los números con desarrollos decimales ilimitados y no perió dicos. Por ejemplo:

$$\pi \approx 3,1415926535...$$
$$e \approx 2,71...$$
$$\sqrt{2} \approx 1,4142135623...$$
$$\sqrt{3} \approx 1,73205080...$$

$\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}$ es la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Se verifica que $\mathbb{N} \subseteq Z \subseteq \mathbb{Q} \subseteq R$.

- Todas las operaciones de suma, resta, multiplicación y divisió n entre números reales son posibles, pues resulta siempre un número real.

- **Signos de Agrupación y Operaciones:** existe un orden para realizar las operaciones si éstas aparecen combinadas. Así:

  - Si hay signos de agrupación, los mismos se eliminan "de adentro hacia fuera".

    Así, al efectuar $\{3 + [5 - (6 - 8) - 2] + 7\}$: 1^ose eliminan los paré ntesis, 2^o los corchetes y en tercer lugar las llaves.

    En cambio, al efectuar $(3 + [5 - \{6 - 8\} - 2] + 7)$: 1^0 se eliminan las llaves, 2^o los corchetes y en tercer lugar los paréntesis.

  - Si hay operaciones combinadas, las mismas se realizan en el siguiente orden:

    1^o las potencias.

    2^o las multiplicaciones y las divisiones.

    3^o las adiciones y las sustracciones.

- En cuanto a la Relación de Orden en $\mathbb{R}$: sean a y b dos números reales

  a es mayor que b : $a > b \Longleftrightarrow (a+(-b)) \in \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los reales positivos).

  a es mayor o igual que b : $a \geq b \Longleftrightarrow a > b \vee a = b$.

- El **Valor absoluto** de un número real x se denota por $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- si a es un número real y n es un número natural (diferente de 0), a^n denota la **Potencia Enésima de** a, es decir, el producto de a por sí mismo n veces.

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n \text{ veces}} \qquad a \text{ es la base y } n \text{ es el exponente}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ para } a \neq 0$$

- Si a es un número real y n es un número natural (mayor que 1), $\sqrt[n]{a}$ denota la **Raíz Enésima de** a. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = b \Longleftrightarrow b^n = a$.

  a es la cantidad subradical y n es el índice de la raíz.

  - Si $a < 0$ y n es par, $\sqrt[n]{a}$ no está definida en $\mathbb{R}$.
  - Si $a < 0$ y n es impar, $\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a$ con $b < 0$.
  - Si $a > 0$ y n es par o impar, $\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a$ con $b > 0$.

- Si en a^n, n es un número racional (de la forma $\frac{p}{q}$), entonces $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ (exponente fraccionario), con $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, q > 1$.

Propiedades de las Potencias:

- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Propiedades de las Raíces (siempre que estén bien definidas).

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} = 4\sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$.

¡Cuidado! $a^n \pm b^n \neq (a \pm b)^n$ (el exponente no es distributivo).

¡Cuidado! $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$ (no se pueden sumar raíces que tienen cantidad subradical diferentes).

$\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{a} \neq \sqrt[n+m]{a}$ (**NO** se pueden sumar los índices de las raíces).

$\sqrt[n]{a^n \pm b^n} \neq a \pm b$ (**NO** vale cancelar el í ndice de la raíz con los exponentes en la cantidad subradical).

1.2. Ejercicios

1. Utilizando los símbolos de pertenencia ($\in$) y no pertenencia ($\notin$), indica a cuál conjunto pertenece cada número de la siguiente tabla:

	$\sqrt[3]{64}$	$\frac{4}{7}$	8	$\sqrt{-4}$	$\frac{-9}{5}$	$0,032$	$\sqrt{8}$	$-6,4$	π	$3\sqrt{2}$
$\mathbb{N}$										
$\mathbb{Z}$										
$\mathbb{Q}$										
$\mathbb{I}$										
$\mathbb{R}$										

2. Ordenar de menor a mayor los siguientes números reales:

$$-2,5; \quad \frac{8}{3}; \quad -\frac{1}{2}; \quad \sqrt{2}; \quad 2\sqrt{3}; \quad -1; \quad \frac{\pi}{3}$$

3. ¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor $\frac{3}{5}; \frac{8}{5}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}$?

4. ¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor $\frac{7}{3}, \frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{11}$?

5. ¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor $\frac{7}{5}; \frac{3}{7}; \frac{11}{14}; \frac{3}{11}; \frac{8}{7}$?

6. ¿Cuál de los siguientes números es mayor $\sqrt[4]{4}$ o $\sqrt[8]{8}$?

7. Calcule el valor de las siguientes expresiones:

   a) $\{8 - [2 - 4(6-3) - 3] - 14\} =$

b) $\left\{1-5\left[-(-1+3)+\frac{1}{5}(-1+6)\right]-7(8+3)(-2+4)\right\}=$

8. Efectuar y simplificar:

   a) $\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}+\frac{7}{8}\times\frac{3}{2}}=$
   b) $\left(\frac{2}{9}-\frac{3}{8}\right)\div\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{6}\right)=$
   c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=$
   d) $\left[(1-2)\div\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}-\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+2^{-1}\right]^{-1}=$
   e) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\cdot\left[2-5\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]=$
   f) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)=$

9. Efectuar y simplificar:

   a) $2^3+5^2=$
   b) $(-\frac{3}{4})^3=$
   c) $3^3\times\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}=$
   d) $\sqrt{81}=$
   e) $\sqrt[5]{(-32)}=$
   f) $\sqrt[3]{(-343)}=$
   g) $(25)^{\frac{3}{2}}=$
   h) $(27)^{-\frac{4}{3}}=$
   i) $7\sqrt{450}-4\sqrt{320}+3\sqrt{80}-5\sqrt{800}=$
   j) $\left(\frac{2^{-3}}{3^{-2}}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3^{-5}}{2^{-4}}\right)^{4}\cdot\frac{3^0}{4^{-2}}=$
   k) $\left(\frac{1}{0{,}18}\right)^{-1}\div 0{,}01=$
   l) $(0,125)^{-\frac{2}{3}}=$
   m) $\frac{1{,}15}{5}\cdot\frac{10}{10^{-7}}=$
   n) $\frac{2^{-1}\cdot 3^{-1}}{2^{-2}-3^{-2}}=$
   ñ) $\frac{s^{-1}+t^{-1}}{\frac{s}{t}-\frac{t}{s}}=$
   o) $\frac{a^{-1}\cdot b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}}=$
   p) $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}=$

q) $\frac{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{-8}-\sqrt[3]{11}+\sqrt[3]{-11}+\sqrt[3]{1}}{\sqrt{(-2)^6+\sqrt{24}+\sqrt{1}}} =$

r) $\sqrt{27^{-\frac{2}{3}}}+5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}} =$

s) $(\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{5}) =$

t) $(\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2 =$

u) $\frac{\left(\sqrt{7}-2\sqrt{11}\right)}{\left(2\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)} =$

v) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)^2-\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-2\sqrt{2}\right)^2 =$

w) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{135}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{32}}+\frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{32}}+\frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-20\sqrt[3]{\frac{1}{200}}+3\sqrt[3]{45}\cdot\frac{1}{6}\sqrt[3]{15}\cdot 4\sqrt[3]{20} =$

10. Calcular el valor de las siguientes expresiones sustituyendo los valores de las letras por:

$$a=-2; b=3; c=5; x=-7; y=12; n=10; m=-5; q=\frac{1}{2}$$

a) $a^3-b^2 =$

b) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^3-c} =$

c) $\frac{2xy+3x}{2x+y-1} =$

d) $(2y+3x)^m =$

11. En las siguientes expresiones, las letras representan números reales no nulos, si están en el denominador, y positivos si están elevados a una potencia fraccionaria. Simplifíquelas y escríbalas de la forma más compacta posible.

a) $(-2a^2\cdot b\cdot c^{-4})\cdot(5a^1\cdot b^3\cdot c^5) =$

b) $((x^2\cdot y^{-1})^2)^{-3} =$

c) $\frac{(10r^{-2}\cdot s)^3}{(50r^3\cdot s^{-1})^2} =$

d) $\left(\sqrt[3]{4x^2\cdot y}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2x^5\cdot y^2}\right) =$

e) $\frac{(\frac{x}{y})^{-1}\cdot(\frac{a}{b})^4\cdot(\frac{x}{y})^6\cdot(\frac{y}{x})^{-3}}{(\frac{a}{b})^{-3}\cdot(\frac{x}{y})^6\cdot(\frac{a}{b})^9} =$

f) $\sqrt{\sqrt[3]{(c^3\cdot d^6)^4}} =$

g) $\sqrt[3]{x^2\cdot y}\cdot\sqrt[4]{x^3\cdot y^2} =$

h) $\left(\sqrt[7]{\frac{x^8\cdot y^9}{z^2}}\right)^2 =$

i) $\sqrt[4]{125d\sqrt{25d^6}} =$

12. Calcular $1\frac{3}{4}$ de 12.

1.3. Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Una ecuación de primer grado con una incógnita es de la forma: $ax + b = 0$ con a y b números reales.

- Si $a \neq 0$ entonces la ecuación $ax + b = 0$ tiene exactamente una solución:

$$x = \frac{-b}{a}$$

- Si $a = 0$ se pueden presentar dos casos:

(1) $b \neq 0$ La ecuación tiene infinitas soluciones.

(2) $b \neq 0$. La ecuación no tiene solución.

Ejemplo:

- Efectuar:

$$\frac{3x + 2 - 4x - 3}{5} = 4 + \frac{x - 2}{35}$$

Solución:

Se Calcula el $m.c.m.$ de los divisores que es 35 y se efectua:

$$\frac{21x + 14 - 20x + 15}{35} = \frac{140 + x - 2}{35} \Rightarrow x + 29 = 140 + x - 2 \Rightarrow 0.x = 109$$

Lo cual indica que la ecuación no tiene solución

Al plantear problemas relacionados con ecuaciones, se encuentran frecuentemente ciertas expresiones, algunas de las cuales me mencionan a continuación

Más, adición, agregar, añadir, aumentar	$+$
Menos, diferencia, disminuido, exceso, restar	$-$
Multiplicación, de, del, veces, producto, por, factor	$*$
División, cociente, razón, es a	.
Igual, es, da, resulta, se obtiene, equivale a	$=$
Un número cualquiera.	x
Antecesor de un número entero cualquiera	$x-1$
Sucesor de un número entero cualquiera	$x+1$
Cuadrado de un número cualquiera	x^2
Cubo de un número cualquiera	x^3

Doble de un número, duplo, dos veces, número par, múltiplo de 2	$2x$
Triple de un número, triplo, 3 veces, múltiplo de 3	$3x$
Cuádruplo de un número	$4x$
Mitad de un número	$\frac{x}{2}$
Tercera parte de un número	$\frac{x}{3}$
Número impar cualquiera	$2x+1$
Semi-suma de dos números	$\frac{x_1+x_2}{2}$
Semi-diferencia de dos números	$\frac{x_1-x_2}{2}$
Números consecutivos enteros cualesquiera	$x, x+1, x+2$
Números pares enteros consecutivos	$2x, 2x+2, 2x+4$
Números impars enteros consecutivos	$2x+1$ $2x+3, 2x+5$

1.4. Ejercicios

1. En cada uno de los siguentes casos, despeje de la igualdad de la izquierda, la letra a la derecha:

   (a) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \quad h =?$

   (b) $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \quad m_2 =?$

   (c) $e = \frac{1}{2}gt^2 \quad t =?$

   (d) $\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'} \quad A' =?$

   (e) $\frac{T+x}{T=x} = \frac{C+d}{C'-d} \quad x =?$

2. Resolver en el conjunto $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

   (a) $\frac{3}{4}x - 1 = 2 + \frac{1}{5}x$

   (b) $\frac{x-1}{5} - \frac{2-x}{3} = \frac{3x}{4}$

   (c) $\frac{x+9}{3} + x = \frac{x-2}{5}$

   (d) $\frac{5+3x}{2} - \frac{2x+5}{3} = \frac{x+10}{3}$

   (e) $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} = \frac{x(x+2)}{2}$

   (f) $\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$

   (g) $x^2 + \frac{1}{x+4} = 9x + \frac{1}{x+4} - 20$

   (h) $\frac{x}{6} - \frac{x-\frac{2}{2}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0$

   (i) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-3}{7} = 4 + \frac{x-2}{35}$

   (j) $\frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{5} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20}$

3. ¿Cuál debe ser el valor de c para que una soluci ón de la ecuación $3x+1-5c = 2c+x-10$ sea 3?

4. Exprese simbólicamente los siguientes enunciados:

   (a) Las tres cuartas partes de un número N es igual al cuadrado de dicho número .

   (b) Un número real a diferente de cero es tal que su cubo es igual al doble de la raíz cuadrada de su cubo

   (c) La edad actual x de Arturo más la mitad de años que tendrá dentro de 12 años es igual a 36 años.

   (d) Si a un número z se le multiplica por 4, al resultado se le suma 4, después se divide por 4 y al cociente se le resta 4 da como resultado 4.

   (e) ¿Como se lee la expresión $2x^3$

      (e.1) El doble del cubo de un número

      (e.2) El doble del triple de un número

      (e.3) El cubo del doble de un número

      (e.4) El cubo del cuadrado de un número

5. Si la mitad de 5p es 3u ¿Cuál es la tercera. parte de 10p?

6. De un recipiente que contiene agua se extrae la mitad y luego la tercera parte de lo que queda y todavia hay 100 litros. ¿Cuá ntos litros de agua tenia originalmente?

7. Si la diagonal de un cuadrado mide $x+y$ ¿Cu ál es el perimetro, en función de x e y, de otro cuadrado cuya área es el doble de la del cuadrado original?

8. A un ángulo agudo a se le suma la mitad de su complemento y se le resta la mitad de su suplemento ¿Cuál es la medida del ángulo resultante?

9. El área de un rectángulo es 32 unidades cuadradas. Si su ancho es la mitad de su largo ¿Cuánto mide la longitud de la diagonal?

10. Los lados de un triángulo están en la proporción 3:4:5 y su perimetro es 24 metros. ¿Cuál es la longitud de su lado mayor y de su lado menor?

1.5. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Propiedades de las raices. Problemas.

Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b y c números reales, a $a \neq 0$.

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ de denomina **discriminante** de la ecuación y según su valor se presentan tres casos: .

- Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una raíz doble $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Si$\Delta > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales y diferentes, que son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene raíces reales.

1.5.1. Suma y producto de las raíces reales de una ecuación de 2 grado

Si $\Delta \geq 0$ la ecuación tiene dos raíces reales x_1 y x_2
La suma es $S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b}{a} \Rightarrow S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
El producto es:

$$P = x_1{\cdot}x_1 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = ca$$

1.5.2. Ecuaciones que se reducen a ecuaciones de primer grado o de segundo grado

1. **Ecuaciones de la forma** $A(x).B(x) = 0$

   Se aplica la propiedad $A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ó $B(x) = 0$

2. **Ecuaciones de la forma**$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$

   Se aplica la propiedad $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$

3. **Ecuaciones irracionales:** Son aquellas en las cuales la incógnita figura bajo el signo de uno o varios radicales. Por ejemplo:

$$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3},\ \text{con } 2x+1 \geq 0 \text{ y } x-3 \geq 0$$

$$x - \sqrt{2x+7} = 4, \text{con } 2x+7 \geq 0$$

Las ecuaciones irracionales se resuelven **eliminando** los radicales. En el caso de la raíz cuadrada, que es la más común, se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación pero sin olvidar que cuando se **elevan al cuadrado ambos miembros de una ecuación**, se pueden introducir **soluciones extrañas** a la ecuación original.

Ejemplos:

- Formar una ecuación de 2 grado cuyas raices sean: $x_1 = 6$ y $x_2 = 4$

Solución:

$S = x_1 + x_2 = 10 \qquad P = x_1 x_2 = 24$

La ecuación es $x^2 - 10x + 24 = 0$

- Determinar dos números cuya suma sea 6 y su producto 5.

  Solución

- $x_1 + x_2 = S = 6 \qquad P = x_1.x_2 = 5$

  Los números buscados son soluciones de la ecuación $x^2 - 6x - 5 = 0$, es decir:

$$x_1 = 3 - \sqrt{14}, \qquad x_2 = 3 + \sqrt{14}$$

- Resolver la ecuación $(2x-1)^2 - 9\,(x+7)^2 = 0$.

  Solución: Factorizando y efectuando

$$[(2x-1) - 3\,(x+7)]\,((2x-1) + (3x+7)) = 0$$

$$(-x+22)\,(5x+20) = 0$$

$$-x + 22 = 0 \qquad \text{ó} \qquad 5x + 20 = 0$$

$$x = -22 \qquad \text{ó} \qquad x = -4$$

- Resolver la ecuación $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

  Solución: Se observa que $x \neq 0$ y $x \neq 2$. Luego, calculando el mínimo común de los denominadores y efectuando:

$$(x+2) - (x-2) = 2$$
$$x\,(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \qquad \text{ó} \;\; x = -1$$

  Sólo se puede considerar como solución: $x = -1$.

- Resolver la ecuación paramétrica $2m - 2x - m\,(x-1) = 2m + 3$.

  Solución: Una ecuación paramétrica es aquella en la cual, además de la incógnita, aparecen otras letras llamadas **parámetros** (m), cuyo valor se supone conocido.

  Al efectuar queda:

$$\begin{aligned} 2m - 2x - mx + m = 2m + 3 \;\; &\Longrightarrow -\,(2+m)\,x = 2m + 3 - 3m \\ &\Longrightarrow -\,(2+m)\,x = -m + 3 \\ &\Longrightarrow (m+2)\,x = m - 3 \end{aligned}$$

Si $m = -2$ entonces la ecuación se reduce a $0.x = -5$ que no tiene solución.

Si $m \neq -2$ entonces $x = \frac{m-3}{m+2}$.

- Resolver la ecuación $x - \sqrt{2x+7} = 4 \qquad (1)$

  Solución: Se debe verificar $2x + 7 \geq 0$, es decir, $x \geq -\frac{7}{2}$.

  Se deja el radical en uno de los miembros, luego: $x-4 = \sqrt{2x-7}$. Elevando al cuadrado ambos miembros $(x-4)^2 = \left(\sqrt{2x-7}\right)^2$ se obtiene

  $$x^2 - 8x + 16 = 2x - 7 \Longrightarrow x = 9 \qquad \text{ó} \;\; x = 1$$

  Sustituyendo en (1) se ve que $x = 1$ no es solución de la ecuación; s ólo lo es $x = 9$.

1.6. Ejercicios

1. Resolver en el conjunto $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

   a) $x^2 + x - 12 = 0$

   b) $3x^2 - 11x - 4 = 0$

   c) $2x^2 + 2x + 2 = 0$

   d) $x^2 - 7x + 12 = 0$

   e) $x^2 - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 4 = 0$

   f) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

   g) $-x^2 + 6x - 9 = 0$

   h) $\sqrt{x + \sqrt{x+8}} = 2\sqrt{x}$

2. Determinar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

   a) 1 y $\frac{1}{2}$

   b) -2 y $-\frac{3}{2}$

   c) $\frac{a}{2}$ y $-\frac{b}{3}$

   d) $2 + \sqrt{5}$ y $2 - \sqrt{5}$

3. Hallar dos números reales sabiendo que:

   a) La suma es 11 y el producto es 30.

   b) La suma es $\frac{31}{30}$ y el producto es $\frac{3}{20}$

   c) La suma es a y el producto es $-2a^2$

4. Se consideran las ecuaciones de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad (1)$$
$$cx^2 + bx + a = 0 \quad (2)$$

   con $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

   a) Resolver las ecuaciones (1) y (2) para $a = 1, b = -5$ y $c = 2$.

   b) Demostrar que las raíces reales de la ecuación (2) son inversas de las raíces reales de la ecuación (1).

5. Resolver las ecuaciones:

   a) $(x+1)^2(3x-5) = (x^2-1)^2$

   b) $(x^2 - 7x + 6)^2 - (x^2 - 1)^2 = 0$

   c) $2\sqrt{x} = \sqrt{x+7} + \frac{8}{\sqrt{x+7}}$

6. Resolver los siguientes problemas planteando una ecuación de segundo grado

   a) Hallar dos números consecutivos tales que el cuadrado del mayor exceda en 57 al triple del menor.

   b) Una persona compró cierto número de libros, de igual costo, por Bs. 180.000. Si hubiera comprado 6 libros menos, por la misma cantidad de dinero cada libro, le habría costado Bs. 1000 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto le costó cada uno?

   c) Un tren ha recorrido 200 Km. en cierto tiempo. Para haber recorrido esa distancia en una hora menos, la velocidad debería haber sido 10 Km/h más. Hallar la velocidad del tren.

Capítulo 2

Polinomios

Definición 1 (Monomio) *Llamaremos* ***Monomio*** *a las expresiones algebraicas en los que se utilizan letras, números y las operaciones producto* $(\cdot)$ *y potencia.*

Ejemplo 1 1) $4x^5$, 2) $-ax^3$, 3) $7ax^4y^6$.

Definición 2 (Polinomio) *Llamaremos* ***polinomio*** *a la suma algebraica de varios monomios.*

A cada monomio lo llamaremos término del polinomio.

Ejemplo 2 *El polinomio* $7x^5 + 9x^4 - 14x - 12$*, tiene cuatro términos, a saber,* $7x^5$*,* $9x^4$*,* $-14x$ *y* -12*.*

Ejemplo 3 *El polinomio* $7ax^4 - 9xy^2 + 90$*, tiene tres términos, a saber,* $7ax^4$*,* $-9xy^2$ *y* $+90$*.*

Se llama **término independiente** a aquel término que no esté acompañado de variables; en los ejemplo 2 y 3, los términos independientes son -12 y $+90$ respectivamente.

Observación:

- Cuando los términos de un polinomio son semejantes, obtenemos un monomio.
- Cuando un polinomio consta de dos monomios no semejantes se denomina **binomio**.
- Cuando un polinomio consta de tres monomios no semejantes se denomina **trinomio**.
- Un polinomio con mas de tres términos se denomina polinomio.

El **grado de un monomio** es la suma de los exponentes de las variables (letras).

El **grado de un polinomio** es igual al del término (monomio) de mayor grado.

Ejemplo 4

- *El monomio* $4x^5$ *tiene grado* 5,
- *El monomio* $-ax^3$ *tiene grado* 4,
- *El monomio* $7ax^4y^6$ *tiene grado* 11,
- *El polinomio* $7x^5 + 9x^4 - 14x - 12$ *tiene grado* 5 *y*
- *El polinomio* $7ax^4 - 9xy^2 + 90$ *tiene grado* 5

2.1. Suma y resta de polinomios

Se podrán sumar los términos (monomios) que sean semejantes de los polinomios objetos de la suma.

Ejemplo 5 *Para calcular la suma de los polinomios* $(4x^4-2x^3+3x^2-2x+5)+(5x^3-x^2+2x)$. *Basta sumar los términos de grado* $3, 2$ *y* 1 *de ambos polinomio y dejar el resto de los términos del primero como esta.*

Podemos indicar la suma de la siguiente forma para verla mejor:

$$\begin{array}{ccccc}
4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -2x & -5 \\
+---- & 5x^3 & +x^2 & 2x & \\
---- & ---- & ---- & ---- & ---- \\
4x^4 & +3x^3 & +2x^2 & & +5
\end{array}$$

Por lo tanto, para sumar dos o más polinomios se suman los términos semejantes de cada uno de ellos. si en lugar de sumar dos polinomios se trata de restarlos, bastaría cambiar el signo a todos los términos del segundo y sumar los resultados.

Ejemplo 6 *Para calcular la suma de los polinomios* $(4x^4-2x^3+3x^2-2x+5)-(5x^3-x^2+2x)$. *Se calcula la suma*

$$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (-5x^3 + x^2 - 2x) = 4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5.$$

2.2. Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se deben multiplicar todos los monomios de uno por todos los otros y sumar los resultados (se debe prestar .ªtención especial al producto de potencias de la misma base”). Si uno de los dos polinomios es un monomio, la operación es simple.

En el caso de que ambos polinomios consten de varios términos, se puede indicar la multiplicación de forma semejante a como se hace con número de varias cifras, cuidando de situar debajo de cada monomio los que sean semejantes. En el siguiente ejemplo se puede ver el producto de dos polinomios de varios términos.

Ejemplo 7 *Calcular el productor entre los polinomios* $2x^3 - 3x^2 + 1$ *y* $2x - 3$*. Para ello, veamos*

$$\begin{array}{ccccc}
 & 2x^3 & -3x^2 & & +1 \\
 & & & 2x & -3 \\
\hdashline
 & -6x^3 & +9x^2 & & -3 \\
4x^4 & -6x^3 & & 2x & \\
\hdashline
 & & & & \\
4x^4 & -12x^3 & +9x^2 & +2x & -3
\end{array}$$

Ejemplo 8 *Calcular el productor entre los polinomios* $-2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ *y* $x + 1$*. Para ello*

$$(-2x^3+3x^2-2x+5).(x+1) = (-2x^4+3x^3-2x^2+5x-2x^3+3x^2-2x+5) = 2x^4+x^3+x^2+3x+5.$$

2.3. Producto Notable

Se denomina **producto notable** a algunas operaciones con polinomios de especial interés ya que aparecen frecuentemente en los cálculos. Las más usuales son:

- **Cuadrado de un binomio: suma** $(a + b)^2$ **o diferencia** $(a - b)^2$. Naturalmente realizar un cuadrado es multiplicar el binomio por sí mismo, luego:

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

"El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo"

En general se puede considerar siempre como una suma y para cada término asignarle el signo que le preceda.

Ejemplo 9 *Desarrollar las siguientes expresiones:*

a) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2{,}2x{,}3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$

b) $(-x + 3)^2 = (-x)^2 + 2.(-x){,}3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9.$

- **Suma por diferencia:** Se refiere al producto de la suma dos monomios por la diferencia de ellos mismos:

$$(a + b).(a - b) = a^2 - ab + ba + b^2 = a^2 - b^2.$$

Siempre recordemos que:

"Suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados"

- **Cubo de una suma:** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$
- **Cuadrado de un trinomio:** $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

2.4. División de polinomios

La división de polinomios, en general se realiza de forma semejante a la de los números de varias cifras, aunque las operaciones que realizamos rápidamente con los números, con los polinomios las vamos indicando. El proceso es el siguiente:

- Organizar el dividendo y el divisor de los polinomios de mayor a menor.
- Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor, dando lugar al primer término del cociente.
- Se multiplica dicho término por el divisor y se coloca debajo del dividendo con los signos contrarios, cuidando que debajo de cada término se coloque otro semejante.

- Se suman los polinomios colocados al efecto, obteniéndose un polinomio de grado menor al inicial.

- se continua el proceso hasta que el resto ya no se pueda dividir entre el divisor por sed de menor grado.

Normalmente se dividen polinomios con una sola variable (x) tanto en el dividendo como en el divisor. En el siguiente ejemplo se puede ver una división completa:

Ejemplo 10 *Dividir los polinomios* $4x^3 - 3x^2 + 3$ *y* $x^2 - x + 1$. *Para ello*

$$
\begin{array}{ccccc|c}
4x^3 & -3x^2 & & +3 & & \underline{x^2 - x + 1} \\
-4x^3 & +4x^2 & -4x & & & 4x + 1 \\
---- & ---- & ---- & ---- & & \\
 & x^2 & -4x & +3 & & \\
 & -x^2 & +x & -1 & & \\
---- & ---- & ---- & ---- & & \\
 & & -3x & +2 & &
\end{array}
$$

Como se ve se ha obtenido de cociente $4x + 1$ *y de resto* $-3x + 2$.

2.5. Factorización

Llamaremos **factorización de polinomios** al proceso de encontrar dos o más expresiones cuyo producto sea igual a una expresión dada,es decir, consiste en expresar a dicho polinomio como el producto de dos o más factores.

Tipos:

1. **Factor común, en monomios:** Se escribe el factor común como un coeficiente de un paréntesis y dentro del mismo se colocan los coeficientes que son el resultado de dividir cada término del polinomio por el factor común. Por ejemplo:

   a) Descomponer en factores (o factorizar): $a^2 + 2a$. El factor común en los dos términos es a por lo tanto se ubica por delante del paréntesis $a(\quad)$. Dentro del paréntesis se ubica el resultado de:

$$\frac{a^2}{FC} + \frac{2a}{FC} = \frac{a^2}{a} + \frac{2a}{a} = a + 2$$

b) Descomponer (o factorizar) $10b - 30ab^2$. Los coeficientes 10 30 tienen los factores comunes 2, 5 y 10. Tomando el 10 porque siempre se toma el **mayor** factor común. El factor común es $10b$. Por lo tanto: $10b - 30ab^2 = 10b(1 - 3ab)$.

c) Descomponer $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2$. Para ello

$$18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 2)$$

d) Factorizar $6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3$.

$$6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3 = 3xy^3(2 - 3nx + 4nx^2 - n^2x^3)$$

2. **Factor común, en polinomios:** El procedimiento es muy parecido al de monomios. Veamos los siguientes ejemplos:

a) Descomponer $x(a + b) + m(a + b)$. Estos dos términos tiene como factor común el binomio $(a + b)$, por lo que se pone $(a + b)$ como coeficiente de un paréntesis dentro del cual escribimos los cocientes de dividir los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a + b)$, es decir

$$\frac{x(a+b)}{(a+b)} = x \quad \text{y} \quad \frac{m(a+b)}{(a+b)} = m$$

y se tiene

$$x(a + b) + m(a + b) = (a + b)(x + m)$$

b) Descomponer $2x(a-1)-y(a-1)$. El factor común es $(a-1)$, por lo que al dividir los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a - 1)$, con lo que tenemos

$$\frac{2x(a-1)}{(a-1)} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{-y(a-1)}{(a-1)} = -y$$

luego

$$2x(a - 1) - y(a - 1) = (a - 1)(2x - y)$$

c) Descomponer $m(x + 2) + x + 2$. Esta expresión se puede escribir como $m(x + 2) + (x + 2) = m(x + 2) + 1(x + 2)$. El factor común es $(x + 2)$ con lo que $m(x + 2) + 1(x + 2) = (x + 2)(m + 1)$.

d) Descomponer $a(x+1)-x-1$. Al introducir los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo $(-)$, se tiene:

$$a(x+1)-x-1 = a(x+1)-(x+1) = a(x+1)-1(x+1) = (x+a)(a-1).$$

3. **Factor común por agrupación de términos**

a) Descomponer $ax+bx+ay+by$. Los dos primeros términos tienen el factor común x y los dos últimos el factor común y. Agrupamos los dos primeros en un paréntesis y los dos últimos en otro precedido del signo $+$ por que el tercer término tiene el signo $(+)$:

$$\begin{aligned} ax+bx+ay+by &= (ax+bx)+(ay+by) \\ &= x(a+b)+y(a+b) \\ &= (a+b)(x+y) \end{aligned}$$

Hay varias formas de hacer la agrupación, con la condición de que los dos términos agrupados tengan algún factor común, y siempre que las cantidades que quedan dentro de los paréntesis después de sacra el factor común en cada grupo, sean exactamente iguales. Si esto no es posible, la expresión dada no se puede descomponer por este método.

En el ejemplo anterior podemos agrupar el 1o. y el 3er. término con el factor común a y el 2do. y 4to. con el factor común b, quedando:

$$\begin{aligned} ax+bx+ay+by &= (ax+bx)+(ay+by) \\ &= a(x+y)+b(x+y) \\ &= (x+y)(a+b) \end{aligned}$$

Este resultado es idéntico al anterior, ya que el orden de los factores no altera el producto.

b) Factorizar $3m^2-6mn+4m-8n$. Los dos primeros términos tienen el factor común

$3m$ y los dos últimos el factor común 4. Agrupando:

$$\begin{aligned} 3m^2 - 6mn + 4m &= (3m^2 - 6mn) + (4m - 8n) \\ &= 3m(m - 2n) + 4(m - 2n) \\ &= (m - 2n)(3m + 4) \end{aligned}$$

4. **Descomposición de un polinomio en factores por el método de evaluación (Ruffini)** Al estudiar la **divisibilidad** por $x - a$ demostramos que si un polinomio entero y racional en x se anula para $x = a$, el polinomio es divisible por $x - a$. Este mismo principio aplica a la descomposición de un polinomio en factores por el **Método de Evaluación**. Veamos un ejemplo

   a) Descomponer por evaluación el polinomio x^3+2x^2-x-2. Los valores que daremos a x son los factores del término independiente, es decir, los factores de -2 a saber: $+1$, -1, $+2$ y -2. Veamos si el polinomio se anula para $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = -2$. Si el polinomio se anula para algunos de estos valores, entonces el polinomio será divisible por x menos ese valor.

   Aplicando la división previamente explicada se verá si el polinomio se anula para estos valores de x y simultáneamente se encontrarán los coeficientes del cociente de la división. En este caso:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & +2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

   El residuo es 0, o sea que el polinomio dado se anula para $x = 1$, luego es divisible por $(x - 1)$.

   Dividiendo $x^3 + 2x^2 - x - 2$ entre $x - 1$ el cociente será de segundo grado y sus coeficientes son $+1$, $+3$ y $+2$, luego el cociente es $+1x^2 + 3x + 2 = x^2 + 3x + 2$ y como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, se tiene $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$. (Factorizando el trinomio tenemos $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$).

   b) Descomponer por evaluación el polinomio $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$. Los factores de 12 son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 y ± 12. Entonces

	|	1	-3	-4	$+12$	Coeficientes del Polinomio
	|		$+1$	-2	-6	
$---$	|	$---$	$---$	$---$	$---$	
$+1$	|	1	-2	-6	$+6$	Coeficientes del Cociente

donde el residuo es 6, por lo tanto, el polinomio no se anula en $x = 1$, y no es divisible por $(x - 1)$. Ahora

	|	1	-3	-4	$+12$	Coeficientes del Polinomio
	|		-1	$+4$	0	
$---$	|	$---$	$---$	$---$	$---$	
-1	|	1	-4	0	$+12$	Coeficientes del Cociente

el residuo es 12, luego el polinomio no se anula para $x = -1$ y no es divisible por $x - (-1) = x + 1$. Veamos que pasa con $x = +2$

	|	1	-3	-4	$+12$	Coeficientes del Polinomio
	|		$+2$	-2	-12	
$---$	|	$---$	$---$	$---$	$---$	
$+2$	|	1	-1	-6	0	Coeficientes del Cociente

el residuo es 0, luego el polinomio se anula para $x = 2$ y es divisible por $(x-2)$. El cociente de dividir el polinomio dado $x^3-3x^2-4x+12$ entre $x-2$ será de segundo grado y sus coeficientes son $1, -1$ y -6, luego el cociente será $1x^2 - 1x - 6 = x^2 - x - 6$. Por lo tanto $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6)$. (Factorizando el trinomio $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x - 3)(x + 2)$).

2.6. Factorización por completación de cuadrados.

2.6.1. Completación de Cuadrados.

Si a, b y c son constantes y x una variable real, entonces se cumple:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Pasos para completar cuadrado:

$$\frac{b}{2a}$$

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Ejemplo 11 *Completar cuadrado de la siguiente expresión* $x^2 - 8x - 7$

$$\begin{aligned} x^2 - 8x - 7 &= \left(x + \left(\frac{-8}{2}\right)\right)^2 - 7 - \left(\frac{-8}{2}\right)^2 \\ &= (x-4)^2 - 7 - 16 \\ &= (x-4)^2 - 23 \end{aligned}$$

Ejemplo 12 *Completar cuadrados de* $3x^2 + 12x - 20$*. Tenemos*

$$\begin{aligned} 3x^2 + 12x - 20 &= 3\left(x + \frac{12}{2{,}3}\right)^2 + 20 - \frac{12^2}{4{,}3} \\ &= 3(x+2)^2 + 20 - \frac{144}{12} \\ &= 3(x+2)^2 + 20 - 12 \\ &= 3(x+2)^2 + 8 \end{aligned}$$

2.7. Ejercicios

1. *Sumar los siguientes polinomios*

   1) $P(x) = 0,1x - 0,05x^2 + 0,7$ $\quad Q(x) = 0,3x + 1 - x^2$ $\quad S(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3} - \frac{x}{4}$.

   2) $R(x) = 3x^2 - 4x^3 + 2 - 6x + x^5$ $\quad T(x) = 7x^5 - x^4 + \frac{5}{3}$
   $U(x) = -\left(6x - 8x^4 + 4x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}\right)$.

2. *Restar los siguientes polinomios*

$$1)\ P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 2 \quad Q(x) = 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 - 5x + 5$$

3. *Factorizar usando factor común*

1) $35m^2n^3 - 70m^3$, *Resp.* $35m^2(n^3 - 2m)$

2) $x^3 + x^5 - x^7$, *Resp.* $x^3(1 + x^2 - x^4)$

3) $9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3$, *Resp.* $3a(3a - 4b + 5a^2b^2 - 8ab^3)$

4) $-16x^3y^2 - 8x^2y + 24x^4y^4 - 40x^2y^3$, *Resp.* $-8x^2y(2xy + 1 - 3x^2y^3 - 5y^2)$

5) $-93a^3x^2y + 62a^2x^3y^2 - 12a^2x$, *Resp.* $-31a^2x(3axy - 2x^2y^2 + 4)$

6) $-3x(x-2) - 2y(-2+x)$, *Resp.* $-(x-2)(3x+2y)$

7) $1 + x + 2a(1+x)$, *Resp.* $(1+x)(1+2a)$

8) $-3a^2b - 6ab + 5a^3b^2 - 8a^2bx + 4ab^2m$, *Resp.* $-ab(3a + 6 - 5a^2b + 8ax - 4bm)$

4. *Factorizar por el Método de Ruffini*

1) $2x^3 + 3x^2 - 18x + 8$,

2) $10x^4 - 20^5 + 10$,

3) $x^3 + 7x - 6$,

4) $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$,

5) $x^3 + ax^2 + x^2 + ax - 6x - 6a$,

6) $x^3 + bx^2 - ax^2 + x^2 + bx - ax - abx - ab$,

7) $2x^7 - 2x^6 - 14x^5 - 14x^4 + 44x^3 + 48x^2$.

5. *Calcular el valor de m para que $15x^3 - 31x^2 + m$, tenga como una de sus raíces 2; calcular las otras raíces y factoricé.*

6. *Complete cuadrado de las siguientes expresiones*

$$1)\ x^2 + 6x + 5,$$

$$2)\ x^2 - 3x + 2,$$

$$3)\ x^2 - x - 1.$$

$$4)\ \frac{5}{2}x^2 + 10x + 13, \qquad \textit{Resp. } \frac{5}{2}(x+2)^2 + 3$$

$$5)\ -4x^2 + 8x - 5, \qquad \textit{Resp. } -4(x-1)^2 - 1$$

$$6)\ \frac{8}{3}x^2 + \frac{80}{3}x + \frac{809}{12}, \quad \textit{Resp. } \frac{8}{3}(x+5)^2 + \frac{3}{4}$$

$$7)\ -3x^2 - 6x - 1, \qquad \textit{Resp. } -3(x+1)^2 + 2$$

$$8)\ 8x^2 - 32x + 28, \qquad \textit{Resp. } 8(x-2)^2 - 4$$

$$9)\ 7x^2 + 14\sqrt{2}x + 9, \quad \textit{Resp. } 7(x+\sqrt{2})^2 - 5$$

$$10)\ -2x^2 - 2x + \frac{1}{4}, \quad \textit{Resp. } -2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

Capítulo 3

Funciones Trigonométricas

3.1. Ángulos

Daremos la definición de ángulo mediante el concepto de ***rotación****. Sean dos vectores* $\vec{r}$ *y* $\vec{r}'$ *de origen común* O*.*

Definición 3 (Ángulo) *Llamaremos ángulo* α *a la rotación de centro* O *que transforma* $\vec{r}$ *en* $\vec{r}'$*.*

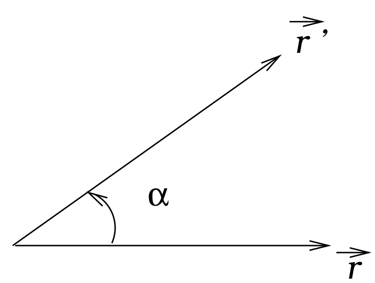


Figura 3.1: Ángulo.

Definición 4 (Ángulo Opuesto) *A la rotación que transforma a* $\vec{r}'$ *en* $\vec{r}$ *la llamaremos ángulo opuesto de* α *y la indicaremos así:* $-\alpha$

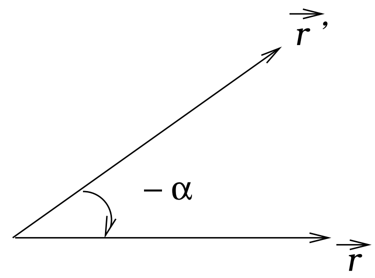


Figura 3.2: Ángulo Opuesto.

En general llamaremos ángulos positivos a las rotaciones de sentido contrario al de las agujas del reloj y ángulos negativos a las rotaciones de sentido igual al de las agujas del reloj.

Definición 5 (Ángulo Nulo) *Es la rotación de centro O que transforma $\vec{r}$ en sí mismo.*

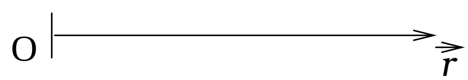


Figura 3.3: Ángulo Nulo.

Definición 6 (Ángulo Llano) *Es la rotación que transforma a $\vec{r}$ en $-\vec{r}$.*

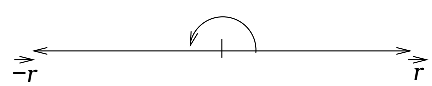


Figura 3.4: Ángulo Llano.

Definición 7 (Ángulo Recto) *Es la rotación que transforma a $\vec{i}$ en $\vec{j}$*

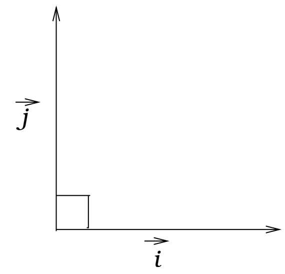


Figura 3.5: Ángulo Recto.

3.1.1. Círculo Trigonométrico

Llamaremos círculo trigonométrico a aquél que se construye sobre un sistema de ejes perpendiculares teniendo su centro en el origen del sistema y cuyo radio mide una unidad.

El sistema de ejes divide al círculo en cuatro partes. Cada una de ellas se llama cuadrante y reciben la numeración que aparece en la Figura.

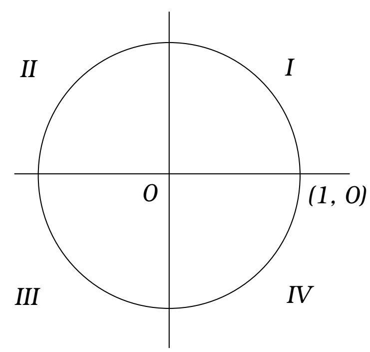


Figura 3.6: Circulo Trigonométrico.

La semirecta horizontal de la derecha se toma como origen de todos los ángulos.

3.1.2. Medida de los ángulos

Si P es un punto cualquiera de la circunferencia, tanto el arco AP como el ángulo AOP vienen a tener la misma amplitud: por esta razón hablaremos indefinidamente de ***arco*** *o de* ***ángulo****.*

La medida de un arco se puede determinar de distintas formas según la unidad de medida que se use.

Los dos sistemas que utilizaremos para medir ángulos o arcos son:

- ***Sistema Circular*** *Toma como unidad de medida el* ***Radian****, que corresponde a un arco cuya longitud es igual a la longitud del radio del círculo.*

  La longitud de una circunferencia es $2\pi R$*. En nuestro caso, siendo el radio igual a 1, la medida de un ángulo completo será* 2π *radianes. El ángulo llano medirá* π *radianes y el ángulo recto* $\pi/2$ *radianes. Un ángulo equivalente a tres rectos serán de* $3\pi/2$ *radianes.*

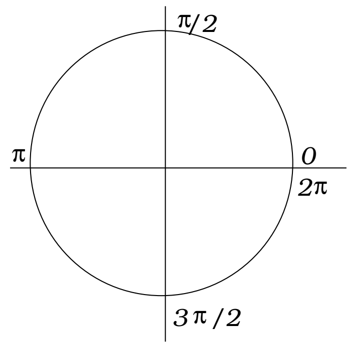
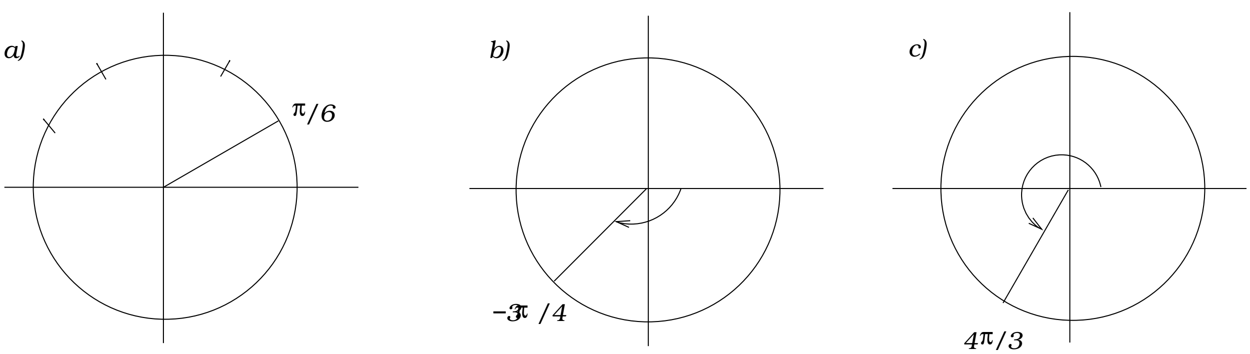


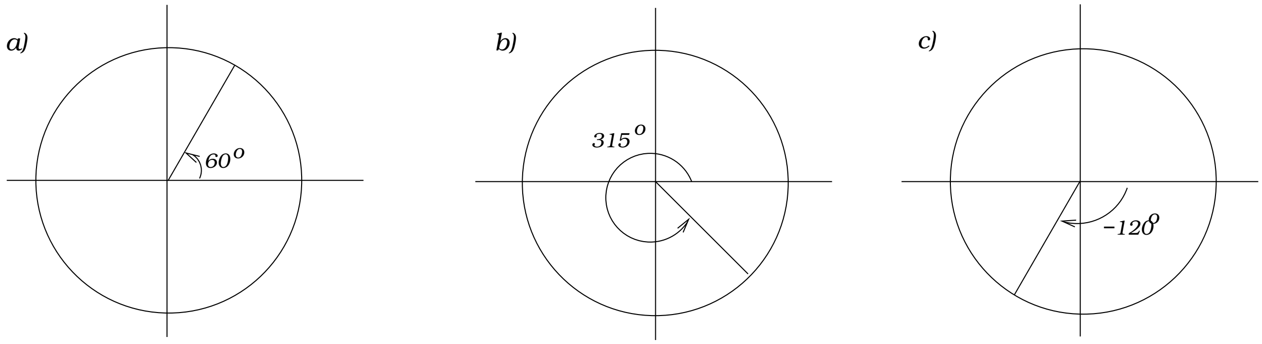
Figura 3.7: Sistema Circular.

- ***Sistema Sexagesimal*** *En este sistema la unidad de medida de un arco es el* ***Grado Sexagesimal*** *que es equivalente a* $1/360$ *de la circunferencia; el ángulo llano mide* $180°$ *y el ángulo recto* $90°$.

Ejemplo 13 *Representar gráficamente los siguientes ángulos: a)* $\pi/6$*; b)* $-3\pi/4$*: c)* $4\pi/3$.



Ejemplo 14 *Representar a)* $60°$, *b)* $315°$, *c)* $-120°$



3.1.3. Conversion de Medidas

Teniendo en cuenta que $2\pi = 360°$ *y que, por lo tanto* $\pi = 180°$, *podemos convertir de un sistema a otro de la siguiente forma:*

- *Para convertir de* ***Grados*** *a* ***Radianes*** *se multiplica el valor del ángulo dado por* $\pi/180°$.
- *Para convertir de* ***Radianes*** *a* ***Grados*** *se multiplica el valor del ángulo dado por* $180°/\pi$.

Ejemplo 15 *Expresar en radianes el ángulo de* $255°$

$$\alpha = 255° = 255° \cdot \frac{\pi}{180°}$$

Ejemplo 16 *Convertir* $11\pi/9$ *a grados sexagesimales*

$$\alpha = 11\pi/9 = \frac{11\pi}{9}\frac{180°}{\pi} = 220°$$

3.2. Función Coseno y Seno de un ángulo

Sea un sistema de ejes coordenados de origen O *y el ángulo* α *una rotación que transforma el vector* $\vec{OM}$ *(unitario) en el vector* $\vec{OP}$.

Por ser $\vec{OP}$ *el transformado de* $\vec{i}$ *(en efecto,* $\vec{OM} = \vec{i}$*) mediante una rotación, es también unitario, es decir*

$$|\vec{OP}| = 1$$

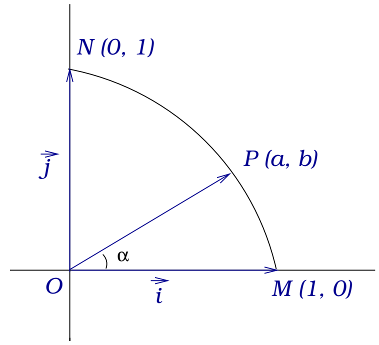


Figura 3.8: Representación Geométrica .

Las componentes de $\vec{OP}$ *son las siguientes:* $\vec{OP} = (a, b)$.

En estas condiciones, definiremos el ***Coseno*** *del ángulo* α *como la abscisa del punto* P *(primera componente del vector* $\vec{OP}$*), es decir*

$$\cos\alpha = a$$

Y definiremos el ***Seno*** *del ángulo* α *como la ordenada del punto* P *(segunda componente del vector* $\vec{OP}$*):*

$$sen\alpha = b.$$

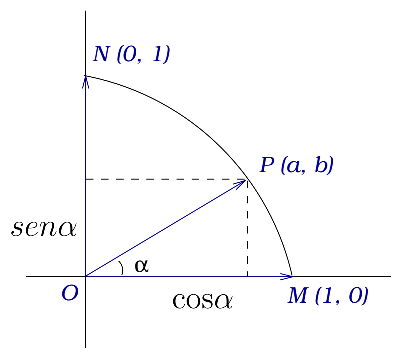


Figura 3.9: Representación del Coseno y Seno de α.

Podemos, entonces, expresar el vector $\vec{OP}$ *de la siguiente forma:*

$$\vec{OP} = (\cos\alpha, sen\alpha)$$

3.2.1. Signo de las funciones cosenos y senos en los distintos cuadrantes

Siendo $\cos\alpha$ *y* $sen\alpha$*, respectivamente, la abscisa y la ordenada del punto* P*, extremos del vector* $\vec{OP}$*, su signo dependerá del cuadrante en el que se encuentre* P

Primer Cuadrante	*Abscisa positiva*	$\cos\alpha > 0$
	Ordenada positiva	$sin\alpha > 0$
Segundo Cuadrante	*Abscisa negativa*	$\cos\alpha < 0$
	Ordenada positiva	$sin\alpha > 0$
Tercer Cuadrante	*Abscisa negativa*	$\cos\alpha < 0$
	Ordenada negativa	$sin\alpha < 0$
Cuarto Cuadrante	*Abscisa positiva*	$\cos\alpha > 0$
	Ordenada negativa	$sin\alpha < 0$

Resumiendo estos resultados en un recuadro obtenemos

Función Cuadrante	*I*	*II*	*III*	*IV*
cos	+	-	-	+
sen	+	+	-	-

3.3. Relación Fundamental de la Trigonometría

Tomemos nuevamente el vector $\vec{OP}$*. Ya sabemos que, por ser unitario*

$$|\vec{OP}| = 1$$

Calculemos el módulo de $\vec{OP}$

$$|\vec{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pero hemos dicho que $a = \cos\alpha$ *y que* $b = sen\alpha$*, por lo tanto*

$$|\vec{OP}| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2}.$$

Y como $|\vec{OP}| = 1$*, tenemos que*

$$\sqrt{(\cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2} = 1.$$

Elevando ambos miembros al cuadrado

$$(\cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2 = 1.$$

En trigonometría se prefiere, para evitar confusiones, escribir $\cos^2\alpha$ *y no* $(\cos\alpha)^2$*. Por lo tanto la expresión anterior la escribiremos así*

$$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1. \tag{3.1}$$

Esta es la relación fundamental de las funciones coseno y seno para cualquier ángulo. De ella se deriva directamente que

$$\cos^2\alpha \leq 1 \quad y \quad sen^2\alpha \leq 1$$

puesto que si cualquiera de ellos fuese mayor que uno, al sumarlo con otro número positivo (nótese que ambos están elevados al cuadrado y son por lo tanto positivos), daría como resultado un número mayor que la unidad.

Lo anterior implica que

$$|\text{cos}\alpha| \leq 1 \quad y \quad |sen\alpha| \leq 1,$$

lo cual puede expresarse también así

$$-1 \leq \text{cos}\alpha \leq 1 \quad y \quad -1 \leq sen\alpha \leq 1,$$

o sea, que las funciones coseno y seno sólo pueden tener valores comprendidos entre -1 *y* 1*.*

$$\text{cos}\alpha \in [-1, 1] \quad y \quad sen\alpha \in [-1, 1].$$

Es importante observar que si despejamos $\cos^2\alpha$ *y* $sen^2\alpha$ *en la ecuación (3.1) obtenemos que*

$$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha, \tag{3.2}$$

$$sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha. \tag{3.3}$$

Ejemplo 17 *Calcular* $\text{cos}\alpha$ *sabiendo que* $sen\alpha = 1/2$ *y que* α *está en el II cuadrante. Por la relación (3.2)*

$$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha.$$

Sustituyendo el valor de $sen\alpha$ *Por la relación (3.2)*

$$\cos^2\alpha = 1 - (1/2)^2$$

Resolviendo Por la relación (3.2)

$$\cos^2\alpha = \frac{3}{4},$$

por lo que

$$\cos^2\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}},$$

con lo que

$$\cos^2\alpha = \pm\sqrt{3}/2.$$

3.3.1. Coseno y Seno del Ángulo Nulo

Tomando el vector $\vec{OP}$ unitario y coincidiendo con $\vec{i}$ y consideremos la rotación que transforma al vector $\vec{OP}$ en sí mismo, es decir, el ángulo nulo.

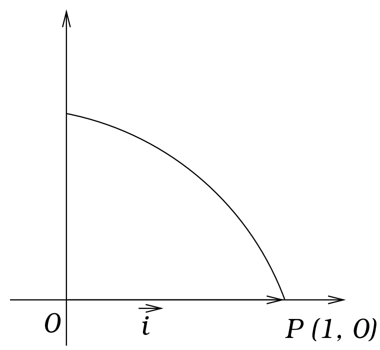


Figura 3.10: Ángulo Nulo.

Las componentes de $\vec{OP}$ son $\vec{OP} = (1, 0)$, y por lo tanto

$$\cos 0 = 1 \quad y \quad sen 0 = 0.$$

3.3.2. Coseno y Seno del Ángulo Recto

Consideremos la rotación que transforma al vector $\vec{i}$ en el vector $\vec{j}$, es decir, el ángulo recto.

Las componentes de $\vec{OP}$ son $\vec{OP} = (0, 1)$, y por lo tanto

$$\cos \pi/2 = 0 \quad y \quad sen \pi/2 = 1.$$

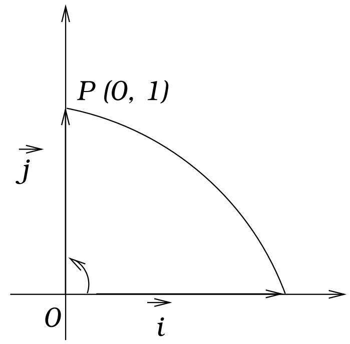


Figura 3.11: Ángulo Recto.

3.3.3. Coseno y Seno del Ángulo Llano

Consideremos la rotación que transforma al vector $\vec{i}$ en el vector $-\vec{i}$, es decir, el ángulo llano

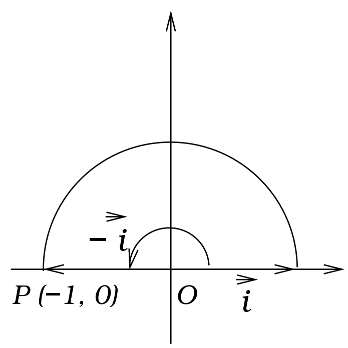


Figura 3.12: Ángulo Llano.

Las componentes de $\vec{OP}$ son $\vec{OP} = (-1, 0)$, y por lo tanto

$$\cos\pi = -1 \quad y \quad sen\pi = 0.$$

3.3.4. Coseno y Seno del Ángulo de $\frac{3\pi}{2}$

Consideremos la rotación que transforma al vector $\vec{i}$ en el vector $-\vec{j}$, es decir, el ángulo de $\frac{3\pi}{2}$

Las componentes de $\vec{OP}$ son $\vec{OP} = (-1, 0)$, y por lo tanto

$$\cos 3\pi/2 = 0 \quad y \quad sen 3\pi/2 = -1.$$

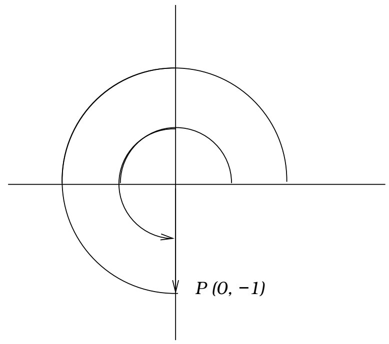


Figura 3.13: Ángulo de $\dfrac{3\pi}{2}$

3.3.5. Coseno y Seno del Ángulo Completo

Al realizar un giro completo, el vector $\vec{OP}$ queda en la posición inicial. Por lo tanto las funciones coseno y seno del ángulo completo serán iguales a las del ángulo nulo, es decir:

$$\cos 2\pi = 1 \quad y \quad sen 2\pi = 0.$$

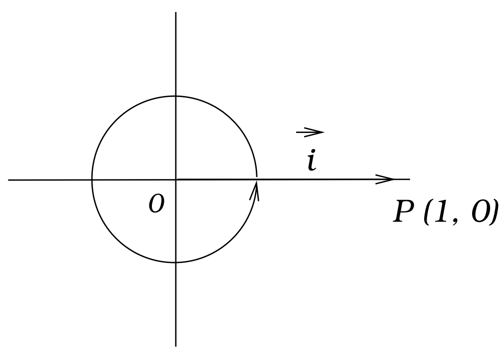


Figura 3.14: Ángulo Completo

Resumiendo en un cuadro estos resultados:

	cos	*sen*
0 (0°)	*1*	*0*
$\pi/2$ *(90°)*	*0*	*1*
π *(180°)*	*-1*	*0*
$3\pi/2$ *(270°)*	*0*	*-1*
2π *(360°)*	*1*	*0*

3.3.6. Coseno y Seno del Ángulo Opuesto

Consideremos las rotaciones que transforman al vector $\vec{OM}$ *en* $\vec{OP}$ *(ángulo* α*) y en* $\vec{OP}'$ *(ángulo* $-\alpha$*).*

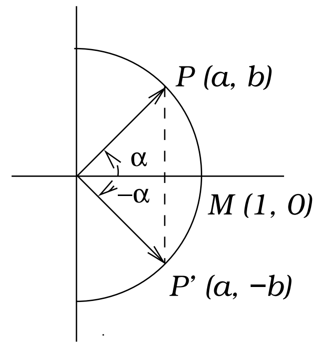


Figura 3.15: Ángulo Opuesto

Podemos observar en la figura que

$$\cos{-\alpha} = a \quad y \quad \cos\alpha = a.$$

Por lo tanto

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha. \tag{3.4}$$

Por otra parte

$$sen(-\alpha) = -b \quad y \quad sen\alpha = b.$$

Cambiando signo en la segunda expresión

$$sen(-\alpha) = -b \quad y \quad -sen\alpha = -b.$$

De donde

$$sen(-\alpha) = -sen\alpha. \tag{3.5}$$

3.3.7. Coseno y Seno de un Ángulo Agudo de un Triángulo Rectángulo

Consideremos un vector cualquiera $\vec{OA}$ *de componentes* (a, b) *y de módulo* r

$$\vec{OA} = (a, b)$$

$$|\vec{OA}| = r$$

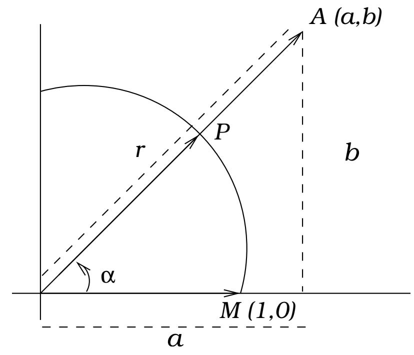


Figura 3.16: Ángulo Agudo de un Triángulo Rectángulo

y un vector $\vec{OP}$ *unitario colineal con el vector* $\vec{OA}$.

Por ser $\vec{OP}$ *y* $\vec{OA}$ *colineales, podemos escribir*

$$\vec{OA} = r\vec{OP}$$

Pero $\vec{OP} = (\cos\alpha, sen\alpha)$*, por lo tanto sustituyendo:*

$$\vec{OA} = r(\cos\alpha, sen\alpha) = (r\cos\alpha, rsen\alpha) \tag{3.6}$$

Pero, por otra parte, también se cumple que

$$\vec{OA} = (a, b) \tag{3.7}$$

Comparando (3.6) y (3.7) tenemos que

$$(r\cos\alpha, rsen\alpha) = (a, b)$$

e igualando componente a componente

$$r\cos\alpha = a \quad y \quad rsen\alpha = b$$

y por último, despejando

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \quad y \quad sen\alpha = \frac{b}{r}.$$

Podemos observar que, en el triángulo OAB*, "a" es el* ***cateto adyacente*** *al ángulo* α*, "b" es el* ***cateto opuesto*** *y "r" es la* ***hipotenusa***. *Por lo tanto, en* ***Triángulo rectángulo*** *se cumple que:*

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \tag{3.8}$$

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \tag{3.9}$$

Ejemplo 18 *Determinar el coseno y el seno del ángulo α en las siguientes figuras*

a) Consideremos la Figura 3.17

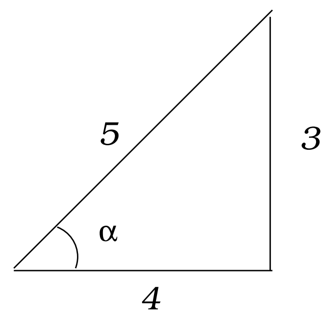


Figura 3.17: Triángulo del Ejemplo a)

Entonces

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ ady}{hip} = \frac{4}{5} \qquad sen\alpha = \frac{cateto\ op}{hip} = \frac{3}{5}$$

b) Consideremos la Figura 3.18

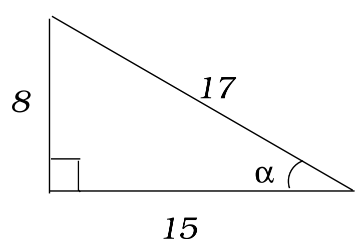


Figura 3.18: Triángulo del Ejemplo b)

Entonces

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ ady}{hip} = \frac{15}{17} \qquad sen\alpha = \frac{cateto\ op}{hip} = \frac{8}{17}$$

3.3.8. Coseno y Seno de un Algunos Ángulo Notables

1. ***Del ángulo de*** $45°$ ***o*** $\pi/4$***.*** *Construyamos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan una unidad cada uno. Al ser los catetos iguales entre sí, también lo serán sus ángulos opuestos y por lo tanto los ángulos CAB y ABC medirán cada uno $45°$. (Recuérdese que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios).*

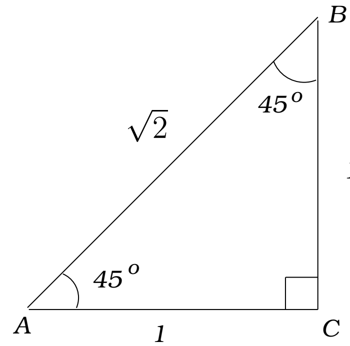


Figura 3.19: Ángulo de 45°

Al aplicar el Teorema de Pitágoras obtenemos el valor de la hipotenusa: $AB = \sqrt{2}$.

En estas condiciones, podemos obtener directamente el valor del coseno y del seno del ángulo de 45°*:*

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sen 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. ***Del ángulo de*** 30° ***y*** 60° ***(*** $\pi/6$ ***y*** $\pi/3$***).*** *Construyamos un triángulo equilátero cuyos lados miden cada uno dos unidades.*

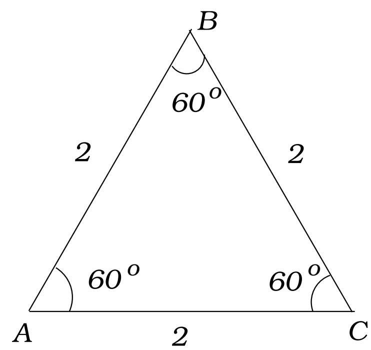


Figura 3.20: Ángulo de 30° y 60°

Por ser equilátero, los ángulos internos del triángulo serán iguales entre sí y medirán 60° *cada uno.*

Tracemos ahora la altura desde el lado AC *hasta el vértice* B*. Por los conocimientos que tenemos de geometría sabemos que la altura* BD *será también* ***Bisectriz*** *del ángulo* ABC *(lo dividirá en dos ángulos de* 30°*) y* ***Mediatriz*** *del lado* AC *(lo dividirá en dos segmentos de una unidad cada uno).*

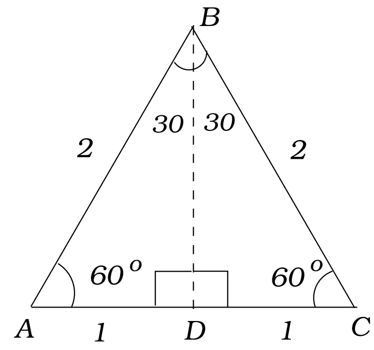


Figura 3.21: Ángulo de 30° y 60°

Tomando el triángulo de la izquierda y, utilizando el Teorema de Pitágoras, calculemos la longitud del lado BD:

$$\begin{aligned} BD^2 &= 2^2 - 1^2 \\ &= 3 \\ BD &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Podemos entonces observar que:

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sen 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad sen 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

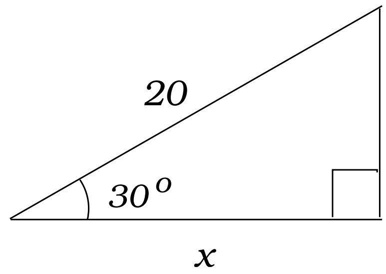
Resumiendo en un cuadro los resultados obtenemos:

		cos	*sen*
$\pi/6$	(30°)	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	(45°)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	(60°)	$1/2$	$\sqrt{3}/2$

3.4. Resolución de Triángulos Rectángulos

Conociendo el valor del coseno y del seno de algunos ángulos notables podemos resolver ya ciertos casos de triángulos rectángulos.

Ejemplo 19 *Calcular x en la figura*



Sabemos que por la relación (3.8)

$$\cos\alpha = \frac{cat\ ady}{hip}.$$

En nuestro caso

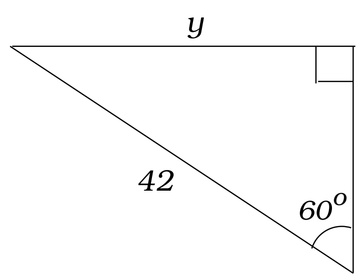
$$\cos 30^\circ = \frac{x}{20}.$$

Despejando x

$$x = 20\cos 30^\circ$$

Sustituyendo el valor conocido y resolviendo $x = 10\sqrt{3}$

Ejemplo 20 *Calcular y en la figura*



Utilizando la relación (3.10)

$$sen\alpha = \frac{cat\ op}{hip}$$

En nuestro caso

$$sen 60^\circ = \frac{y}{42} \tag{3.10}$$

Despejando, sustituyendo valores y resolviendo

$$\begin{aligned} y &= 42 sen 60^\circ \\ & 42.\sqrt{3}/2 \\ y &= 21\sqrt{3} \end{aligned}$$

3.5. Identidades Trigonométricas

Se llaman identidades trigonométricas aquellas igualdades que contienen funciones de un ángulo o de varios y se verifican cualquiera sea el valor que se le da al ángulo o los ángulos.

Deseamos recordar las normas principales en la demostración de identidades y proporcionar material suficiente de ejercitación.

Existen varias formas para demostrar una identidad. Una de ella es Transformando uno de los miembros mediante relaciones trigonométricas hasta hacerlo exactamente igual al otro.

Ejemplo 21 *Demostrar la siguiente identidad*

$$tag^2\alpha - sen^2\alpha = \frac{sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Tomaremos el primer miembro

$$tag^2\alpha - sen^2\alpha = \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} - sen^2\alpha$$

Sacando común denominador:

$$tag^2\alpha - sen^2\alpha = \frac{sen^2\alpha - sen^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

sacando factor común en el numerador

$$tag^2\alpha - sen^2\alpha = \frac{sen^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

Por la relación (3.3)

$$tag^2\alpha - sen^2\alpha = \frac{sen^2\alpha sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

y por ultimo, multiplicando

$$tag^2\alpha - sen^2\alpha = \frac{sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}$$

con lo que tenemos demostrada la identidad.

Para resolver identidades trigonométricas no existe ninguna regla determinada. El mayor o menor dominio de las relaciones permitirán resolver con mayor o menor facilidad cada una de las situaciones que se presenten.

3.6. Ejercicios

1. *Representar gráficamente cada uno de los siguientes ángulos medidos en radianes:*

   a) π b) $5\pi/6$ c) $\pi/8$ d) 2π e) $-\pi$

   f) $\pi/4$ g) $5\pi/4$ h) $5\pi/3$ i) $-\pi/2$ j) $11\pi/6$

2. *Convertir a radianes:*

   a) $30°$ b) $18°$ c) $150°$ d) $315°$ e) $225°$

   f) $90°$ g) $60°$ h) $165°$ i) $300°$ j) $285°$

3. *Convertir a grados sexagesimales:*

   a) $\pi/3$ b) $\pi/6$ c) $4\pi/3$ d) $17\pi/36$ e) $7\pi/10$

   f) $\pi/4$ g) $\pi/18$ h) $2\pi/3$ i) $6\pi/5$ j) $5\pi/6$

4. *Calcule* $\cos\alpha$ *con los datos que se dan en cada uno de los siguientes ejercicios:*

   a) $sen\alpha = 1/\sqrt{2}$ $(\alpha$ *en I)* b) $sen\alpha = -9/41$ $(\alpha$ *en III)*

   c) $sen\alpha = 5/13$ $(\alpha$ *en II)* d) $sen\alpha = -1$

   e) $sen\alpha = -15/17$ $(\alpha$ *en III)* f) $sen\alpha = -3/5$ $(\alpha$ *en IV)*

5. *Calcule* $sen\beta$ *con los datos que se dan en cada uno de los siguientes ejercicios:*

   a) $\cos\beta = 1/\sqrt{5}$ $(\beta$ *en I)* b) $\cos\beta = -2/5$ $(\beta$ *en III)*

   c) $\cos\beta = 40/41$ $(\beta$ *en IV)* d) $\cos\beta = -3/4$ $(\beta$ *en II)*

   e) $\cos\beta = 1$ f) $\cos\beta = 0{,}5$ $(\beta$ *en IV)*

6. *Demostrar cada una de las siguientes identidades:*

$a)\ \cos^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;\quad b)\ \cos^2 x = (1 - senx)(1 + senx);$

$c)\ 2\sin^2 x + \cos^x = 1 + \sin^2 x;\quad d)\ \dfrac{\cos x}{senx} + \dfrac{senx}{1+\cos x} = \dfrac{1}{senx}$

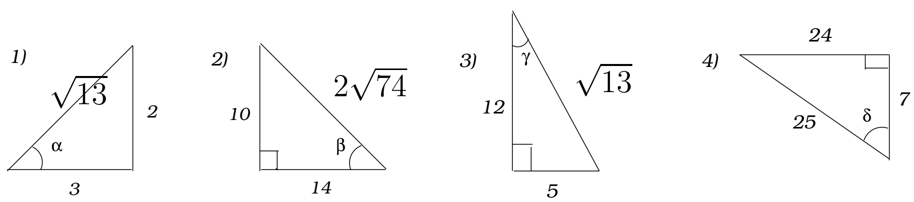
$e)\ \dfrac{sen^2\alpha}{1+\cos\alpha} = 1 - \cos\alpha\quad f)\ \dfrac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$

7. *Calcular el valor de cada una de las siguientes expresiones*

$$a)\ \frac{\sqrt{3}sen30^\circ}{\cos 30^\circ} + \cos^2 45^\circ + \cos^2 180^\circ;$$

$$b)\ \frac{2sen\pi/4 + 2sen\pi/3}{\cos^2\pi/6 + \cos^2\pi/3}$$

8. *Calcular en cada figura las incógnitas que se señalan:*



9. *Utilizando las relaciones fundamentales, demostrar las siguientes identidades:*

$a)\ \dfrac{sen^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = 1 - \cos\alpha,\quad b)\ \dfrac{\cos^2\alpha}{1 - sen^2\alpha} = 1 + sen\alpha,$

$c)\ sen^4\alpha - sen^2\alpha = \cos^4\alpha - \cos^2\alpha,\quad d)\ \dfrac{sen\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = sen\alpha\sec\alpha + 1,$